いま、もう一つの素粒子論入門

パリティ編集委員会編（大槻義彦責任編集）
益川敏英　著

丸善株式会社

目 次

第 1 章
相対論の世界

1.1　はじめに

素粒子のかかわる現象はミクロの世界の現象であるから，量子力学の法則が支配している世界の出来事ある。また，素粒子の運動では粒子の生成・消滅が不断に生じており，その粒子の静止質量エネルギーが丸ごと相互作用をした相手の粒子の運動エネルギーに転化するような激しい運動をしている。だからその速度は光速，またはそれに近いと考えられる。このことは，素粒子の運動を記述する理論は，相対論の要請に従わなければならないことを示している。この量子論と相対論の要請を満たす理論が，相対論的場の量子論，略して場の理論とよばれる理論である。これは素粒子を語る言葉といえる。

素粒子論入門というと，「物質の基本構成要素はこれこれで，陽子や中性子はこれらからつくられています」的な話が多いが，素粒子を支配している法則は時空の幾何学とたいへんかかわりの深い一般相対性やゲージ原理と深くかかわっている。これが素粒子の世界の一大特徴である。これらの説明を抜きにして今日の素粒子論の到達点を語ることは不可能である。場の理論は素粒子の世界を語る言葉であるといったが，これは定量的な側面まで語ることのできる言葉なので，計算すればいろいろなことが予言できる。このレベルで理解しようとすれば，それは簡単ではないが，英語のような外国語の学習を思い出していただけばわかるように，「この言葉はこのようなことを表している」ということを覚えれば，後は慣れだけの側面がある。この意味で素粒子の出来事を記述する言葉である場の理論に

ついての超々入門にも触れたい。

20 世紀の初めにアインシュタイン (A.Einstein) は，重力の理論として一般相対論を完成させた後に，物理学を構成する概念の基礎には幾何学があるとして，物理学の基本法則の統一的記述の可能性を示唆した。これは，素粒子を支配する法則にすべてゲージ理論としての特徴が明確になってきた段階で，必ずしも夢物語ではない現実性を帯びたものとして，今日大きく浮び上がってきている。素粒子物理学がこれらに対する最終回答を与えるのは 21 世紀に入ってからであろうが，これらの課題意識を背景にもって今日の素粒子論の到達点を歴史を追って紹介したい。まず，相対論から始めよう。

1.2　マクスウェル方程式とローレンツ共変性

アメリカで南北戦争が終結した年，1864 年にマクスウェル (J.C.Maxwell) は電磁気の現象を記述する運動方程式，いわゆるマクスウェル方程式を発見する。それまでに知られていた，電場とその源 (電荷) の関係を表したガウス (C.F.Gauss) の法則，磁場には電場のような源がないことを示す式，電流が流れると磁場ができることを示すアンペール (A.Ampèle) の法則，磁場の時間変動は電場を発生させると主張するファラデー (M.Faraday) の法則を整理統合して，マクスウェルは次の 4 つの式を得た。

$$\epsilon_0 \mathrm{div}\boldsymbol{E} = \rho \qquad (\text{ガウスの法則}) \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0 \qquad (\text{磁場に源なし}) \tag{1.2}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} \qquad (\text{アンペールの法則}) \tag{1.3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H} = 0 \qquad (\text{ファラデーの法則}) \tag{1.4}$$

ここで，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \rho, \boldsymbol{j}$ は電場，磁場，電荷密度，電流密度であり，ϵ_0, μ_0 は真空の誘電率と透磁率である。ここで，この方程式群を 4 次元の記法を用いて書き直してみよう。まず，4 元電流密度，4 元座標を $(J_\mu) = (J_0, J_i) = (\rho/\epsilon_0 c, \mu_0 \boldsymbol{j})$, $(x_\mu) = (ct, \boldsymbol{x})$ $(c^{-2} = \epsilon_0\mu_0)$ と定義しよう。ここで添字のギリシア文字は 0, 1, 2, 3 をラ

テン文字は 1, 2, 3 を走るものとする。同様に微分記号も，$\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$ として，次の反対称 2 階テンソル $F_{\mu\nu}$ を導入する。

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ -E_1/c & 0 & \mu_0 H_3 & -\mu_0 H_2 \\ -E_2/c & -\mu_0 H_3 & 0 & \mu_0 H_1 \\ -E_3/c & \mu_0 H_2 & -\mu_0 H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

すると，式 (1.1) と (1.3)，式 (1.2) と (1.4) はそれぞれ次の 2 つの式にまとめることができる。

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + J_\nu = 0 \tag{1.5}$$

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{1.6}$$

$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -\eta_{00} = 1$，$\eta_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu)$ として，$\partial_\mu = \eta_{\mu\nu}\partial^\nu$ とした。ここで上下にそろったギリシア文字の添字は 0 から 3 までの和をとると約束されている。このアインシュタインの約束事を以下では黙って使うことにする。また，$\eta_{\mu\nu}$ の逆行列は $\eta^{\mu\nu}$ と表し，これは $\eta_{\mu\nu}$ に等しい。添字の上げ下げはこの η を使って行う。また式 (1.5) は，$F_{\mu\nu}$ の反対称性より $\partial^\nu\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ となり，結果として $\partial^\nu J_\nu = 0$ となる。これは電荷の保存 $\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0$ のことである。

なんと美しい式にまとまったことか。この式からマクスウェルの方程式群がもつ対称性を引き出すことはたやすい。ここで 4×4 の行列 a_μ^ν を導入して，$(a^{\mathrm{t}}\eta a)^{\mu\nu} = a_\lambda^\mu \eta^{\lambda\chi} a_\chi^\nu = \eta^{\mu\nu}$ とする。a^{t} は a の転置行列である。この a を用いて次の変換を考える。下付きの添字は，この行列でベクトルのように変換すると決める。例えば，A_μ は $A_\mu{}' = a_\mu^\nu A_\nu = (aA)_\mu$ である。すると $B^\mu = B_\kappa \eta^{\kappa\mu} = (B^{\mathrm{t}}\eta)^\mu$ だから，アインシュタインの規約で和をとった量，例えば $B^\mu A_\mu$ はこの変換のもとで，$B^{\mathrm{t}} a^{\mathrm{t}} \eta a A = B^{\mathrm{t}} \eta A$ となり不変である。このことに留意すれば式 (1.5) は 2 項とも 4 元ベクトルとして変換し，式 (1.6) は 3 項とも 3 階 4 元テンソルとして変換している。これはマクスウェル方程式群がこの変換のもとで形を変えないことを意味している。この変換はローレンツ (H.A.Lorentz) 変換とよばれ，これがマクスウェル理論はローレンツ共変であるとよばれる内容である。

$J_\mu = 0$ として式 (1.5) と (1.6) を解いてみると，速度が c で伝搬する解があった。1849 年にフィゾー (A.H.L.Fizeau)，翌年にフーコー (J.B.L.Foucault) が回転

する歯車や鏡を巧妙に使って実験室内で光速度を測定していたが，誘電率や透磁率から求めた c はこの光速に一致していたのである。こうして光は電磁現象であることが確立する。

式 (1.5) は電磁場と 4 元電流が結合した式で運動法則といえるが，式 (1.6) は電場と磁場の間の関係で，電場と磁場は独立でなく拘束条件があることを示した式である。ベクトル場 $\boldsymbol{B}$ が $\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0$ を満たせば，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ があって，$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ と書けることはよく知られているが，式 (1.6) はこれを 4 次元に拡張したものになっていて，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と 4 元ベクトルポテンシャルを使って表せる (ポアンカレ (J.H.Poincarè) の逆補題)。しかし表し方は一意的でなく，A_μ で可能であれば，任意のスカラー関数 χ に対して，$A_\mu + \partial_\mu \chi$ も同じ $F_{\mu\nu}$ を表す。この自由度をゲージの自由度とよぶ。不定性があると議論がわずらわしいときは，4 元ベクトルポテンシャル A_μ に人工的に付加条件を課してゲージの自由度を殺すことがある。これをゲージの固定という。$\partial^\mu A_\mu = 0$ を課すのをローレンツ・ゲージとよび，$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ はクーロン (C.A. de Coulomb) ゲージという。問題ごとに便利なゲージ固定があるので，ゲージ固定の仕方を変えたいときがある。これは χ を適当に選べば，$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$ で実現できる。これをゲージ変換とよんでいる。量子論以前では，物理量はあくまで電場や磁場であってベクトルポテンシャルはあくまでも仮想的に導入されたものであった。しかし，量子論になり荷電粒子も波動関数とよばれる広がりのあるもので表現せねばならなくなった段階でベクトルポテンシャルの方が本質的であることが明らかとなる。これは後に詳細に議論することになる。

マクスウェルが彼の方程式を発表した後に，それがガリレイ (G.Galilei) 変換に対して共変になっていないことが問題となった。ガリレイ変換共変性とは，静止系で記述した運動法則も等速運動している系でのそれも同じ形をしていることをさす。等速で進む船の上の人が石を静かに手放せば，陸上から見れば船の速度で進行方向に投げ出したのと同じであるから放物運動をしているが，船の上の人から見れば，やはり陸上での自由落下と同じで真下に等加速度で落下している。すなわち自由落下は陸上でも，等速で動いている船上でも同じであることを見いだした，あの有名な話のことである (図 1.1)。実際にニュートン (A.Newton) 力学で，n 個の質量 m_i の質点 $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の運動は，

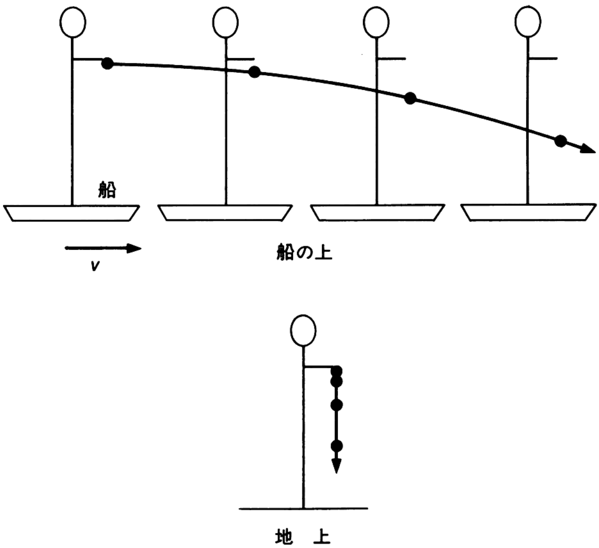


図 1.1　ガリレイの相対性。ガリレイは等速で動く系の法則も静止系の法則と同じであることを発見した。

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}t^2} = G \sum_{j=1}^{n} m_i m_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3} \tag{1.7}$$

と書ける。G は万有引力定数である。この方程式が定数速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を使った変換 $t \to t$, $\boldsymbol{x}_i \to \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{v}t$ に対して不変であることを見るのはたやすい。すなわち，静止系でも速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている系でも運動方程式の形は変らないのである。

1.3　相対論と光速不変

マクスウェル方程式がガリレイ変換に対して共変でないことは，われわれの宇宙に絶対静止系があることを意味するのであろうか。電磁波を伝える媒体エーテルを想定すれば，エーテルに対する静止系が絶対静止系である。ローレンツはこ

の問題を理論的に考察して，マクスウェル方程式はガリレイ変換の代りに，前に述べたローレンツ変換に対しての共変性があることを発見し，動いているものの時間は遅れ，長さは縮む (ローレンツ収縮) ことを表す式を発見しているが，光速不変原理とそこから導かれる同時刻概念の相対性 (静止系と等速運動をしている系では違う) の発見には至らなかった。ローレンツはエーテルの存在を捨てきれなかったともいえる。

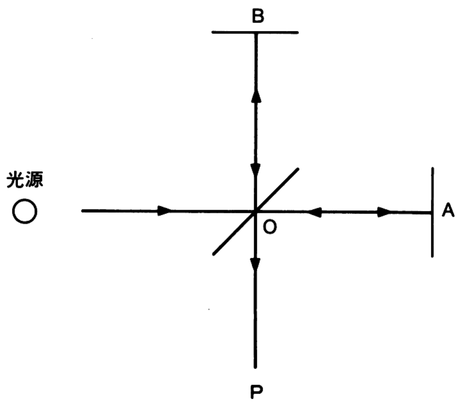


図 1.2　マイケルソンとモーレーの実験。光源から来た光を O のハーフミラーで A と B 方向に分離して，鏡 A と B で反射させて点 P で干渉させる。この装置がエーテルに対して動いていれば光が光路 OA と OB を往復する時間が運動方向により変るので，装置を回転させれば干渉縞に変化が現れる。

一方マイケルソン (A.A.Michelson) とモーレー (E.W.Morley) は 1887 年に地球の公転運動のエーテルに対する速度を決める実験 (彼らの発案した干渉計による) を行った。装置 (図 1.2) を回転させれば装置のエーテルに対する速度が変るので，彼らの装置の精度と公転速度を考慮すれば，干渉縞の変化が見えるはずであった。しかし，実験にはかからなかった。絶対静止系はなく光速は静止系でも等速度で動いている系でも同じであると結論された。

静止系と等速度で動いている系の座標の原点が一致するようにとってあるとし

て，時刻ゼロで原点から発した光の 2 つの系での座標を $(t, \boldsymbol{x})$, $(t', \boldsymbol{x}')$ とすると，2 つの系で光速が c であることは，$|\boldsymbol{x}|/t = |\boldsymbol{x}'|/t' = c$ と表せる。これは，ここで $(x_\mu) = (ct, \boldsymbol{x})$, $(x'_\mu) = (ct', \boldsymbol{x}')$ を導入すれば，$x^\mu x_\mu = -c^2t^2 + \boldsymbol{x}^2$ であるから，$x^\mu x_\mu = x'^\mu x'_\mu = 0$ と書き換えることができる。すなわち光速不変とは 4 元ベクトルの長さ $x^\mu x_\mu$ はゼロのままで，ローレンツ変換不変であることと等価である。マクスウェル理論ではエネルギー E と運動量 $\boldsymbol{P}$ から $P_\mu = (E/c, \boldsymbol{P})$ をつくると，これが 4 元ベクトルとなった。これを 4 元運動量ベクトルという。ということは，$-P^\mu P_\mu = E^2/c^2 - P^2$ がローレンツ不変量となる。粒子にもこれが適用できるとすると，この不変量は粒子固有の量になるはずである。この量の次元は質量の 2 乗×速度の 2 乗なので，m^2c^2 とおいて E について解いてみると，

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2\boldsymbol{P}^2} = mc^2 + \boldsymbol{P}^2/2m + \cdots$$

となる。この式から m の意味は明らかで，粒子の質量であり，相対論的なエネルギーは運動量がゼロでも静止質量エネルギー mc^2 をもっていることを上の式は表している。古典論ではエネルギーはスカラー量で原点のとり方は理論から決まらなかったが，ゼロベクトルは明確な意味をもち，相対論ではエネルギーは 4 元ベクトルの第ゼロ成分なのでエネルギーの原点が理論的に決まる。このことより，mc^2 の存在が明らかになったのである。

アインシュタインは相対論を発表した 1905 年に，後にノーベル賞受賞対象となった光電効果の論文を書いている。光電効果の実験事実を分析して，ミクロの世界の光は，波長を決めればそのエネルギーと運動量が決まり，それらは量子化されていることを突き止めた。古典的な波であれば，波長を決めても振幅を変えればエネルギーと運動量は変る。光は粒子と波との両方の性質をもっていたのである (光子)。粒子であればそれを伝えるエーテルは必要がない。かくしてアインシュタインはエーテルの存在を捨て去ることができたのである。

次にローレンツ変換の意味を考えてみる。x_2 と x_3 軸は変換を受けないものとすれば，行列 a に対する条件は 2×2 行列の式 $a^{\mathrm{t}}\eta a = \eta$ $(-\eta^{00} = \eta^{11} = 1,\ \eta^{01} = \eta^{10} = 0)$ となる。その一般解は

$$a = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\beta^2} & -\beta \\ -\beta & \sqrt{1+\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \epsilon_2 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

であるが*)，3 つの行列のうち，第 1 と第 3 の行列は $\epsilon=-1$ なら，時間または空間の正の方向を逆転させるだけなので，以下では $\epsilon_1=\epsilon_2=1$ としておく。このローレンツ変換で結びつけられた 2 つの座標系 (ct,x_1) と (ct',x_1') を A 系，B 系とよぶことにする (図 1.3)。式 (1.8) より

$$ct'=\sqrt{1+\beta^2}ct-\beta x_1,\qquad x_1'=-\beta ct+\sqrt{1+\beta^2}x_1 \tag{1.9}$$

である。ここで B 系の座標の意味を考えてみよう。$x_1'=0$ の軌跡は A 系では $x_1=vt$ $(v=c\beta/\sqrt{1+\beta^2})$ であるから，B 系の空間の原点は A 系から見れば速度 v で動いている。すなわち，B 系は A 系に対し等速度運動をしている系であるといえる。$t'=$ 一定のラインの意味であるが，アインシュタインはこのライン

---

*) ローレンツ群に対する知識があれば (連結成分は $\det a=\pm1$, $a_{00}/|a_{00}|=\pm1$ の 4 成分)，式 (1.9) は自明だが，初等的に求めよといわれると，次のようになる。

$$a=\begin{pmatrix} A & -C \\ -B & D \end{pmatrix},\qquad a^{\mathrm{t}}\eta a=\eta$$

の一般解 a を求める。a が解なら

$$a_0=\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} \epsilon_3 & 0 \\ 0 & \epsilon_4 \end{pmatrix}$$

もまた解であることは見やすい。ここで ϵ_i $(i=1,\cdots,4)$ は ±1 である。とすると，この ϵ の自由度を使えば，a_0 の $(0,0)$ 成分と $(1,1)$ 成分は正と仮定してよい。この a_0 を

$$a_0=\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & \delta \end{pmatrix}\qquad (\alpha>0,\ \delta>0)$$

として，$a_0^{\mathrm{t}}\eta a_0=\eta$ に代入すると

$$\alpha^2-\beta^2=1,\qquad \delta^2-\gamma^2=1,\qquad \alpha\gamma-\beta\delta=0$$

となる。$\beta=(\alpha/\delta)\gamma$ を上の第 1 式に代入して第 2 式を使うと $\alpha^2=\delta^2$ となり，α も δ も正であるから，$\alpha=\delta$。上の第 3 式より，$\beta=\gamma$。また，第 1 式より $\alpha=\sqrt{1+\beta^2}$。また

$$a_0(\beta)=\begin{pmatrix} \sqrt{1+\beta^2} & -\beta \\ -\beta & \sqrt{1+\beta^2} \end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\sigma}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると $a_0(-\beta)=\boldsymbol{\sigma}_3 a_0(\beta)\boldsymbol{\sigma}_3$ となる。

$$a=\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} a_0(\beta) \begin{pmatrix} \epsilon_3 & 0 \\ 0 & \epsilon_4 \end{pmatrix}$$

であるから，ϵ_1 と ϵ_4 が同符号なら，$(-1)^2a_0=(-1)a_0(-1)$ を使って $\epsilon_1=\epsilon_4=1$ にできる。異符号なら，$a_0(-B)=\boldsymbol{\sigma}_3 a_0(B)\boldsymbol{\sigma}_3$ を使うことにより同符号にできる。

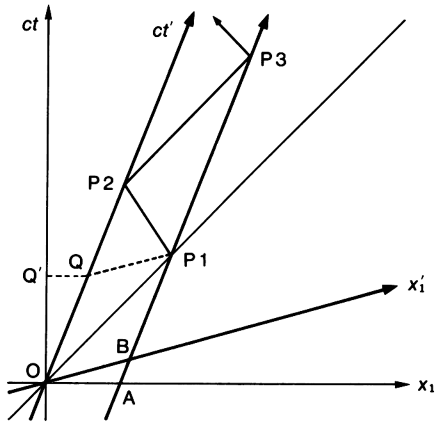


図 1.3 光速不変と同時刻。アインシュタインは光速不変原理を用いて時計合せをすることにより等速運動する系の同時刻の概念に到達した。例えば P1 と Q。

は B 系の同時刻のラインであると結論した。それは次の議論による。B 系で鏡を向かい合せに $x_1^{'}=0$ と $x_1^{'}=l$ に置き，光をその間で往復させる。その軌跡を，O-P1-P2-P3 の折れ線のラインとする。光速不変原理 (空気中の音速では行きと帰りの速度が違う) より O-P1 と P1-P2 に要した時間は同じはずである。ゆえに P1 と $x_1^{'}=0$ 上の同時刻の点は，O-P2 の中点 Q である。これから Q-P1 と平行なラインが B 系での同時刻の点の集合と結論される。これは $t^{'}=$ 一定のラインである。かくして A 系の同時刻と B 系での同時刻は違った概念だと結論される。このことを理解すれば相対論は何も神秘的なことはなくなる。次に速度の加法法則を導いてみよう。原点から発した B 系で速度 $v^{'}$ で動いている点は $x_1^{'}/t^{'}=v^{'}$ である。この点の A 系での座標を (ct, x_1) とすれば，式 (1.9) から x_1 と t を求めて，

$$
\begin{aligned}
v_+ &= x_1/t \\
&= \frac{\beta ct^{'} + \sqrt{1+\beta^2}x_1^{'}}{c\sqrt{1+\beta^2}t^{'} + \beta x_1^{'}}c
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\beta c/\sqrt{1+\beta^2} + x_1^{'}/t^{'}}{1 + (c\beta/\sqrt{1+\beta^2})(x_1'/t')(1/c^2)}$$

$$= \frac{v + v^{'}}{1 + vv'/c^2}$$

となる。これが相対論的な速度 v と $v^{'}$ の合成則である。$|v|, |v^{'}| \ll c$ ならわれわれがよく知っている速度の合成則になる。われわれは光速に近い速度の現象をつぶさに観測することがなかったので，これを実感できなかっただけである。

B 系で長さ l の棒を左端が原点にあるように置いたなら，時刻 $t^{'} = 0$ での右端を B とすれば，その座標は $(0, l)$ である。この軌跡は A-P3 のラインで示される。とすれば A 系で見たときこの棒の長さは時刻 $t = 0$ で計ると A 系での原点と同時刻である点 A の A 系での x_1 座標ということになる。これは簡単な計算で $l\sqrt{1-(v/c)^2}$ となる。これがローレンツ収縮である。また，B 系で原点に置いた電球を P2 $(0, \tau)$ で消したとき，A 系では $Q^{'}$ 点と同時刻で消えたと認識される。これも簡単な計算により $\tau/\sqrt{1-(v/c)^2}$ となる。これが動いているものの時間は遅れるといわれることの内容である。不安定粒子を加速してみればその半減期がこの法則に従って伸びることは実験事実として観測されている。

第2章

量子論の世界

2.1 電子や陽子の世界

ラボアジェ(A.L.Ravoisier)の燃焼の研究から結論された質量保存則，ドルトン(J.Dolton)による分圧の法則の発見，アボガドロ (A.Avogadro) 仮説とその意義のカニッツァーロ (S.Cannizzaro) による再発見を経て 1858 年に原子の概念は確立する。だが，これもギリシアの“もはやこれ以上分解できないもの”としてのアトムではなかった。産業革命の時代は真空技術や，電池の性能と電圧の昇圧技術の進歩をもたらした。これらの背景があってトムソン (J.J.Thomson) は陰極線の実験で電子の存在を明らかにする (1897 年)(図 2.1)。真空にしたガラス管内の電極に電圧をかけると，陰極の金属内の電子が引っ張り出されて陽極に向かう。これはガラス管内の残留ガスと衝突してガスを青白く光らせる。この軌跡中に水車

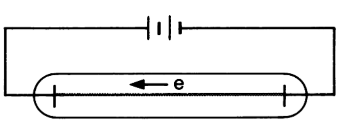


図 2.1　陰極線管の実験。真空にしたガラス管の両端に電圧をかけると陰極から電子が飛び出し残留ガスと衝突して，その軌跡が青白く光る。

を入れておくと，それが回るので陰極から陽極に何かが流れていることが確認できる。トムソンはこれに磁場をかけてその軌道の変化を調べ，この流れているものの電荷と質量の比はいつも同じであることをつきとめた。電子の質量や電荷のようなミクロの量は，当時の実験技術では測ることは困難であったが，電子の運動は電荷/質量 (比電荷) の組合せのみに依存しているので，上記の簡単な実験で測定が可能であった。

これは水滴が電荷を帯びたというようなイメージでは説明できない。質量も電荷もばらばらでその比は一定にならないはずである。これはある決まった電荷と質量をもつ粒子が流れていることを強く示唆している。こうして電子が発見された。

原子から電子をはぎとった残りが原子核であるが，これの描像を確立させたのは，ラザフォード (E.Rutherford) による理論的分析であった。金の薄膜にアルファ線 (ヘリウムの原子核のことで，電子より約 8 千倍重い) を照射すると大角度で散乱されるものがあることが当時知られていた。ラザフォードはクーロン (C.A. de Coulomb) 散乱においては軽いものに衝突しても大きくは曲がらないこと，狭い領域に大きな質量がありその近くを通過したとき大きく曲げられること，を理論的に明らかにして，原子はその質量のほぼすべてが中心のたいへん狭い領域 (原子の大きさの約 10 万分の 1) に集中しており，それを電子が取り巻いている，との描像を確立した。一番軽い原子，すなわち水素の原子核は陽子とよばれる。電子の質量は陽子の約 2 千分の 1 で，陽子の電荷を 1 とすると，電子のそれは -1 である。

またあとで詳しく論じるが，素粒子のたいへん重要な性質に統計性とよばれる性質がある。これは同じ状態に何個でも入れるものがボース (S.N.Bose) 統計，ゼロか 1 個のものがフェルミ (E.Fermi) 統計である。黒体輻射の理論から光子はボース統計で，分子原子のスペクトル準位の分析から電子や陽子はフェルミ統計であることが知られていた。そしてボース統計に従う粒子をボース粒子またはボソンとよび，フェルミ統計に従うものをフェルミ粒子またはフェルミオンとよんでいる。また，ボース粒子の結合系はボース統計に従うが，フェルミ粒子の偶数個の集団はボース統計になることが知られている。

軽い原子核の質量は陽子の整数倍に近かったので，原子核は陽子からつくられているとする仮説は魅力的であったが，例えば窒素の原子核は陽子の約 14 倍の重

さて，電荷は 7 であった。とすると，14 個の陽子の電荷 14 は電子 7 個で電荷 7 まで中和されている必要がこの説にはあった。これは原子核というたいへん狭い領域に軽い電子を 7 個閉じ込めるという不自然さ (後で議論することになるが，量子力学では軽い粒子を狭いところに閉じ込めると非常に大きなエネルギーをもつことになる) に加え，21 個のフェルミ粒子からつくられた原子核であるから，それはフェルミ統計に従わねばならないが，実験はボース統計性を示していた。

この当時は，ミクロの世界では古典力学の基礎概念が通用しないことを示した量子力学の発見の直後であったから，原子よりさらに 10 万分の 1 の大きさの世界では何が起こっていても不思議はないとする神秘主義が横行していた。軽い電子が原子核内に閉じ込められていても，統計性の合成則が壊れていても，無視される雰囲気があった。しかし，1932 年にチャドウィック (J.Chadwick) により，陽子と質量がほぼ等しく中性の粒子，すなわち今日中性子とよんでいる粒子が発見されると，ハイゼンベルク (W.K.Heisenberg) は原子核構造論の論文を発表する。

原子核は陽子と中性子からつくられており，原子では原子核の正の電荷を電子が中性化しているので，電子の数は陽子の個数に等しい。電子の運動が原子の化学的性質を担っているので，原子の化学的性質は，最終的には陽子の個数で決まっている。この理由で原子核の陽子の数を原子番号 (Z で表す) という。中性子の質量が陽子のそれにほぼ等しいことから，原子核の質量は陽子と中性子の個数の和がおおよその目安となるので，これを質量数 (A で表す) という。

陽子の数が同じでも中性子の数が違う原子核が存在する。これは化学的性質は同じで，質量のような物理的性質が違うだけなので，同位体という。質量数まで含めて原子を明示したいときには，原子記号の左肩上に質量数を書いて示す。例えば，先ほどの窒素は，原子記号は N で，陽子と中性子が 7 個ずつだから ^{14}N で表される。これでこの原子核はボース統計になり，電子を狭いところに閉じ込める必要もなくなった。著者の師である坂田昌一博士は，学士論文 (!) で，中性子の導入が，それまでにあった矛盾を一気に解決したことの，ドラマティックな展開を感動をもって記述している。後に紹介することになるが，これは博士が後に陽子と中性子に加え Λ 粒子を基本構成子とした坂田模型 (クォーク模型の原型となったもの) を発見する際の原体験であった。

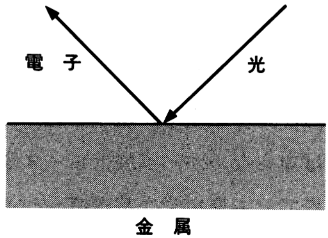


図 2.2　光電効果。電子が金属の束縛を振り切れるだけのエネルギー (仕事関数という) を光子から受けとると，電子は金属から飛び出す。

2.2　ミクロの世界の法則，量子論

金属に光を当てると電子が飛び出す現象を光電効果というが，この現象では光量を少なくしても，飛び出す電子の数は光量に比例して少なくなるが，電子のエネルギー分布は変らない (図 2.1)。これは光を古典的波と考えたのでは理解できない。弱い光は振幅の小さい電磁波であり，エネルギー密度は振幅の 2 乗に比例するから，光量が少なくなればなるほどエネルギー密度は小さくなり，電子が吸収する量は少なくなるはずであり，飛び出す電子のエネルギー分布は変化するはずである。この困難をアインシュタインは光量子仮説を導入して解決した。ミクロの光は波としての性質と同時に粒子としての特徴を合せもっている実体，光子である，とした。すなわち，波長 λ，振動数 ν の光子は，

$$E = h\nu, \qquad p = h/\lambda \tag{2.1}$$

で決まるエネルギー E と 運動量 p をもつとした。ここで h はプランク定数 ($h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot sec}$) である。光量が少なくなることは光子の数が少なくなることだから，電子のエネルギー分布は変らず，飛び出す電子の数の減少をうまく説明できる。式 (2.1) をアインシュタインの量子条件という。

この考えを電子にも当てはめてみる。すなわち，電子も粒子であると同時に波動としての性質をもつとする。電子の質量を m とすれば，自由電子のエネルギー

は $E = p^2/2m$ である。振動数 ν，波長 λ の波は $\psi = \exp(i2\pi x/\lambda - i2\pi\nu t)$ で表されるから，式 (2.1) に注意すれば，

$$E\psi = i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\psi, \qquad p\psi = -i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\psi \tag{2.2}$$

であるから ψ は次の式を満足する。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi, \qquad H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

ここで $\hbar = h/2\pi$ を使った。これがシュレーディンガー (E.Schönger) 方程式 (1926 年発見) である。ここで式 (2.3) は特定の波長や振動数に対する関係ではなく，任意の状態にある質量 m の自由粒子を記述できるものになっている。この ψ は物理的な波ではなく，$\psi^*(x)\psi(x)$ が点 x での粒子の存在確率を表す確率波だと理解されている。$\psi(x)$ は波動関数とよばれる。とすると粒子が観測される位置の期待値 $\bar{x}$ は $\bar{x} = \int \mathrm{d}x\, \psi^* x\psi$ となる。エネルギーや運動量の期待値 $\bar{E}$ と $\bar{p}$ は，波動関数を式 (2.2) が成り立つ状態 (固有状態という) の重み付きの和に書き直して期待値を求めると，その結果は位置の場合と同様に，

$$\bar{E} = \int \mathrm{d}x\ \psi^* H\psi, \qquad \bar{p} = \int \mathrm{d}x\ \psi^* p\psi \tag{2.4}$$

となる。このように量子力学では物理量は波動関数に作用する演算子で表される。期待値がいつも実数になるためにはこの演算子はエルミート (C.Hermite) である必要がある。

次に期待値からのずれを

$$\Delta x^2 = \int \mathrm{d}x\ \psi^*(x - \bar{x})^2\psi, \qquad \Delta p^2 = \int \mathrm{d}x\ \psi^*(p - \bar{p})^2\psi \tag{2.5}$$

で定義しよう。ここで $\psi' = [\xi(x - \bar{x}) + i(p - \bar{p})]\psi$ を考えて，$\psi'^*\psi' \geq 0$ と部分積分を一度使うことにより，

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ \psi^*[\xi^2(x - \bar{x})^2 + i\xi(xp - px) + (p - \bar{p})^2]\psi \\ = \xi^2\Delta x^2 - \xi\hbar + \Delta p^2 \\ \geq 0\end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。ここで，$[x, p] = xp - px = i\hbar$ と $\int \mathrm{d}x\, \psi^*\psi = 1$ を使った。式 (2.6) は ξ の 2 次の不等式であるから判別式より次式が導かれ，同様にして時間とエネルギーについての不等式も得られる。

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2, \qquad \Delta t \Delta E \geq \hbar/2 \tag{2.7}$$

これは不確定性関係とよばれ，狭い場所に押し込めると運動量が大きくなることを示している。水素原子では原子核のまわりを電子が回っているが，古典力学の描像では荷電粒子が加速度運動をすると，電磁波を放出してよりエネルギーの低い状態になり，最後は原子核に吸い込まれてしまう。しかし，量子力学では極小領域に閉じ込めると運動量が大きくなり，エネルギー的に高い状態になって電磁波を放出できなくなる。これが量子力学による原子の安定性の説明である。原子には最低のエネルギー状態 (基底状態) があることが理解できたが，複数の電子をもつ原子ですべての電子がこの基底状態に落ち込まないのは電子がフェルミ統計に従っているからである。

状態は波動関数で表されるといったが，これら関数全体がつくるベクトル空間をヒルベルト (D.Hilbert) 空間という。いま考えている系が 2 つの状態のみで近似的に表現できるとすれば，状態は 2 成分のベクトルで表せる。また，エネルギーを表す演算子 (ハミルトニアン (W.R.Hamilton) という) はこの 2 成分のベクトルに作用しているのであるから，2×2 エルミート行列になる。エネルギー E の固有状態は，

$$H\psi = E\psi, \qquad \psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma^* & b \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

と表される。2 つの状態を混合する強さ γ がゼロのとき，2 つの状態のエネルギー E は a か b である。$a \leq b$ と仮定して，式 (2.8) を解くと，解 (図 2.3) は

$$E = \frac{a + b \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4\gamma^*\gamma}}{2} \tag{2.9}$$

のようになる。2 つの準位にそれらを混合させる作用が働くと，低い準位をさらに押し下げる。後に粒子の交換で生じる交換力の話をするが，それはここで話した準位の混合が本質であることがわかる。

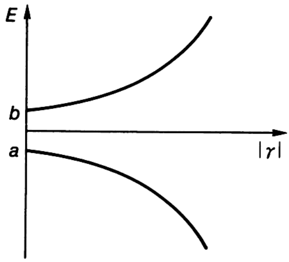


図 2.3　準位の混合。2 つの状態に混合の効果が加わると低い準位はより低く，高い準位はより高くなる。

2.3　量子論の枠組

n 次元のベクトル $\boldsymbol{v}$ は成分を与えて $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ と表すこともできる。波動関数は $\psi_x = \psi(x)$ と見れば，無限次元のベクトルの成分表示と考えてよい。ベクトルが成分表示でなく，まとめて $\boldsymbol{v}$ と表しておいたほうが便利なことがあるように，波動関数も成分表示をせずにベクトル表示をしたいときがある。ディラック (P.A.M.Dirac) は便利な記号を導入した。波動関数に対して，特にそれを A でラベルしたいときは $|A\rangle$ と書きケットとよんだ。演算子 K が作用した結果は $K|A\rangle$ であり，$|A\rangle$ と $|B\rangle$ との内積は $\langle A|B\rangle$ とした。成分表示との対応を書けば，

$$|A\rangle,\ |B\rangle \to \psi_A,\ \psi_B, \qquad \langle A|B\rangle \to \int \mathrm{d}x\ \psi_A^* \psi_B \tag{2.10}$$

となる。$\langle A|$ はブラベクトルとよび，$|A\rangle$ の双対ベクトルである。

量子力学の時間発展は確率の保存と重ね合せの原理より，時間発展の演算子 $U(t_2, t_1)$ はユニタリーであることが導かれる。時刻 $t = t_1$ で状態 $|A; t_1\rangle$ のとき，時刻 t_2 の状態を $|A; t_2\rangle$ とすれば，

$$|A; t_2\rangle = U(t_2, t_1)|A; t_1\rangle$$

と書ける。法則に時間依存性がなければ，$U(t_2 + c,\ t_1 + c) = U(t_2, t_1)$ より，U は時間差のみに依存する。ここで，

$$\left[i\hbar\frac{\partial U(t_2-t_1)}{\partial t_2}U^*(t_2-t_1)\right]_{t_2-t_1}=H$$

を定義すると，$U(t,t_1)=\exp[-iH(t-t_1)]$ となる。U のユニタリー性より H はエルミート演算子となる。t_1 は固定し，$t=t_2$ の変化のみに注目すれば，$|A;t\rangle$ は次の方程式を満たす。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|A;t\rangle=H|A;t\rangle \tag{2.11}$$

これが量子力学の枠組だけから導かれるハミルトニアン H と波動方程式の意味である。H の具体形を与えることで考えている系が指定される。

物理量 $\mathcal{O}$ の時刻 t での期待値は

$$\langle A;t|\mathcal{O}|A;t\rangle=\langle A;t|U^*(t,t_1)\mathcal{O}U(t,t_1)|A;t\rangle \tag{2.12}$$

だから，$\mathcal{O}(t)=U^*(t,t_1)\mathcal{O}U(t,t_1)$ を導入すれば，これは

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O}(t)=\mathcal{O}(t)H-H\mathcal{O}(t)=[\mathcal{O}(t),\,H] \tag{2.13}$$

を満たす。いま，$[x,p]=i\hbar$ として，

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{kx^2}{2} \tag{2.14}$$

と H を決めよう。式 (2.13) を 2 度使って，

$$m\frac{\partial^2}{\partial t^2}x=-\frac{m}{\hbar^2}[[x,H],H]=-kx \tag{2.15}$$

をうる。ここで $[x,p]=i\hbar$ を使った。式 (2.15) は式 (2.14) で記述される系が調和振動子の量子論版であることを示している。

さらにこの調和振動子をもう少し詳しく見てみよう。次のように a と a^* を導入すれば，

$$a=\sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}}x+i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}}p,\qquad a^*=\sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}}x-i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}}p \tag{2.16}$$

H は次のように書ける。

$$H=\hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right),\qquad N=a^*a,\quad \omega=\sqrt{k/m} \tag{2.17}$$

また，N と a, a^* は次の代数を満たす。

$$[a,a^*]=1,\qquad [a,a]=[a^*,a^*]=0 \tag{2.18}$$

$$[N,a^*]=a^*,\qquad [N,a]=-a \tag{2.19}$$

ここで H の期待値が最小になる状態 $|0\rangle$ (ただし，$\langle 0|0\rangle=1$) を求めてみよう。$\langle 0|H|0\rangle=\hbar\langle 0|a^*a|0\rangle+\hbar\omega/2$ であり，$|0'\rangle=a|0\rangle$ としてみれば，右辺の第 1 項は $\langle 0'|0'\rangle$ と書けるので，非負である。ゆえに，$a|0\rangle=0$ が十分条件になる。これに解があることを次に示す。

この条件は波動関数に戻して考えたほうがわかりやすい。

$$a|0\rangle=0\to\left[\sqrt{\frac{k}{2\hbar\omega}}x+i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\psi_0=0 \tag{2.20}$$

となり，これは簡単に解けて，

$$\psi_0=c_0e^{-\lambda x^2/2},\qquad \lambda=\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}$$

となる。c_0 は $\int \mathrm{d}\psi_0^*\psi_0=1$ となるように選ぶ。次に，$|n\rangle=(a^*)^n|0\rangle/\sqrt{n!}$ とすれば，式 (2.18), (2.19) より $\langle n|n\rangle=1$ と $N|n\rangle=n|n\rangle$ が導かれる。また，式 (2.19) より

$$Na|n\rangle=([N,a]+aN)|n\rangle=(n-1)a|n\rangle \tag{2.21}$$

$$Na^*|n\rangle=([N,a^*]+a^*N)|n\rangle=(n+1)a^*|n\rangle \tag{2.22}$$

となる。ここで，N は固有値 $0,1,2,\cdots$ をもつ個数演算子であり，a^* や a はその個数を増やしたり，減らしたりする演算子であることがわかる。a^* や a は生成・消滅演算子とよばれる。これは場の理論で場 (波動) を量子化すると粒子像が表れるが，その機構はここにある。

N や a, a^* を特徴づけたのは，式 (2.18),(2.19) であったが，ここで式 (2.18) において，交換子 $[A,B]=AB-BA$ を新しい交換子 $[A,B]_+=AB+BA$ でおき換えてみよう。

$$[a^*,a]_+=a^*a+aa^*=1,\qquad [a,a]_+=2a^2=0,\qquad [a^*,a^*]=2(a^*)^2=0 \tag{2.23}$$

となる。式 (2.23) でも関係式 (2.19) は同様に導けるので，N は個数演算子，a^* と a は生成・消滅演算子と見ることができるが，$|n\rangle=(a^*)^n|0\rangle$ としたとき，式

(2.23) によって $n \geq 2$ に対して $|n\rangle = 0$ となってしまう。これは同じ状態にはゼロか 1 個しか入れないというフェルミ統計性を表すのに使われる。

第 3 章

場の理論超入門（I）

3.1　変分原理

物理学においては時間発展の法則は運動方程式で記述されるが，この方程式を直接調べるよりも，ラグランジアン (J.L.Lagrange) L とよばれる量から始める方が量子論や相対論との親和性がよく，対称性と保存量の関係も見やすいので便利である。まず質点系から始めよう。

いま，x と y の関数 $L(x,y)$ があったとき，$L(x,y)_{x=\dot{q}(t),y=q(t)}$ を $L(\dot{q},q)$ と書くことにする。ここで $\dot{q}=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ とした。この L で決まる次の量を考えよう。

$$S=\int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}}\mathrm{d}t\ L(\dot{q},q) \tag{3.1}$$

いま $q(t)\to q(t)+\Delta q(t)$ (ただし，$\Delta q(t_\mathrm{f})=\Delta q(t_\mathrm{i})=0$) なる変分に対して，$S$ が停留するのはどのような $q(t)$ に対してかを考えよう。

$$\begin{aligned}\Delta L&=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\Delta\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial q}\Delta q\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\Delta q\right)+\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}+\frac{\partial L}{\partial q}\right)\Delta q\end{aligned} \tag{3.2}$$

式 (3.1) が停留する条件は，式 (3.2) を積分したものが，任意の微小変分 Δq に対してゼロと表される。変分は始終状態でゼロにとってあることに留意すれば，第1項の積分はゼロとなるので，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}=\frac{\partial L}{\partial q} \tag{3.3}$$

が求める条件となる。これはオイラー (L.Euler) 方程式とよばれる式である。考えている運動方程式が導ける L をその方程式のラグランジアンという。$L = m\dot{q}^2/2 - V(q)$ なら，$m\ddot{q} = -\partial V/\partial q$ となる。

いま，$q = F(q')$ で変数 q から q' に変換したとしよう。とすれば対応するラグランジアンは $L'(\dot{q}', q') = L(\dot{F}(q), F(q))$ であるが，もし関数形が同じ，$L'(x, y) = L(x, y)$ であったとすると，変分原理の立場から見れば，この q' の満たすべきオイラー方程式も q のオイラー方程式と同じ形をしているはずである。このことは $q = F(q')$ を式 (3.3) に代入したとき結果として得られる式は前と同じ形をしていることを意味している。すなわち，空間回転共変な理論がほしければ空間回転に対し不変なラグランジアンから出発すればよいということになる。

次に正準形式に移る。q の正準共役量 p を $p = \partial L/\partial \dot{q}$ と定義する。そしてハミルトニアン H を次の式で定義する。

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(\dot{q}, q) \tag{3.4}$$

この H は p の定義式から $\dot{q}$ を p と qの関数として表し，$\dot{q}$を消去しておく。式 (3.4) を変分すると

$$\frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{\partial H}{\partial q}\delta q = \delta p\dot{q} + p\delta\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\delta q \tag{3.5}$$

となる。この式で右辺第 2 項と 3 項は p の定義式より打ち消し合う。そしてオイラー方程式に留意すれば

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} - \dot{q}\right)\delta p + \left(\frac{\partial H}{\partial q} + \dot{p}\right)\delta p = 0 \tag{3.6}$$

となる。δp と δq が独立であれば，

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{3.7}$$

が導ける。これはオイラー方程式と等価な式である。いま $A(p, q)$ と $B(p, q)$ にポアソン (S.D.Poisson) 括弧を

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial B}{\partial q}\frac{\partial A}{\partial p} \tag{3.8}$$

で導入すれば，$\{q, p\} = 1$，$\{q, q\} = \{p, p\} = 0$ であり，$\mathcal{O}(p, q)$ の時間微分は式 (3.7) に留意すれば，

$$\dot{\mathcal{O}} = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$= \{\mathcal{O}, H\} \tag{3.9}$$

と表せる。これは前に説明した量子論の場合と $\{\ ,\ \}$ と $[\ ,\ ]/i\hbar$ を対応させればまったく同じである。このことはオイラー方程式で記述される運動方程式が量子論として得られる理論をつくりたければ，古典論の正準理論のポアソン括弧を $[\ ,\ ]/i\hbar$ でおき換えればよいということになる。この操作を量子化とよんでいる。しかしこれはあくまでも量子論を得るための発見法である。ディラック場の場合は変更が必要となる。

次に保存則について考察しよう。時間依存性のある微小変数 ϵ を用いて，変換 $q \to q + \delta q$, $\delta q = \epsilon F(q)$ を考え，ラグランジアンの応答より次式で $Q = \partial L/\partial\dot{\epsilon}$ と $\partial L/\partial\epsilon$ を定義する。

$$\begin{aligned}
\Delta L &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} F(q)\dot{\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{F}(q)\epsilon + \frac{\partial L}{\partial q} F(q)\epsilon \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{\epsilon}}\dot{\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \epsilon}\epsilon
\end{aligned} \tag{3.10}$$

すると，Q の時間変化は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{Q} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} F(q)\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) F(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{F}(q) \qquad (3.11) \\
&= \frac{\partial L}{\partial q} F(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{F}(q) \\
&= \frac{\partial L}{\partial \epsilon} \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

ゆえに，時間依存性のない ϵ に対して L が不変であれば $\dot{Q}$ は保存することになる。式 (3.11) から式 (3.12) への変形でオイラー方程式を使った。

3.2　場の方程式と正準理論

質点系では質点の座標が力学変数であったが，電磁気では空間の各点ごとの電場や磁場の強さが力学変数である。このように空間の各点ごとに力学変数があるものを場とよぶ。それはベクトル量でもスカラー量でもよく，また内部自由度をもっていてもよい。これらをまとめて，いましばらく $\phi_a(x)$ $(a = 1, 2, \cdots, n)$ と

しよう。ここで $\mathcal{L}(\partial_\mu\phi(x), \phi(x))$ なるラグランジアン密度とよばれる量を考えて，これの時間空間積分が停留する条件を求めてみよう。ϕ の変分 $\Delta\phi$ は時刻 $t_{\rm i}$ と $t_{\rm f}$，空間の無限遠方でゼロのものを考えている。すると，

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu\Delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\Delta\phi_a \\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\Delta\phi_a\right] + \left\{-\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}\right\}\Delta\phi_a \end{aligned} \tag{3.13}$$

となる。ここで重複して現れたギリシア文字については 0,1,2,3，ローマ文字の添字については $1, 2, \cdots, n$ にわたる和をとるものと約束されている。ここで変数 $X_{\mu a}$ と Y_a の関数 $\mathcal{A}(X_{\mu a}, Y_a)$ に対して，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{A}(\partial_\mu\phi_a, \phi_a)}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} &= \left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial X_{\mu a}}\right)_{X_{\mu a}=\partial_\mu\phi_a, Y_a=\phi_a} \\ \frac{\partial\mathcal{A}(\partial_\mu\phi_a, \phi_a)}{\partial\phi_a} &= \left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial Y_a}\right)_{X_{\mu a}=\partial_\mu\phi_a, Y_a=\phi_a}\end{aligned}$$

なる記法を導入した。

$\mathcal{L}$ を積分したものがこの変分に対して停留する条件を考える。式 (3.13) の第 1 項は表面積分になり，変分 $\Delta\phi$ が境界でゼロにとってあることに留意すれば，その停留の条件は

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \tag{3.14}$$

となる。これは場のオイラー方程式とよばれる。この方程式がローレンツ共変になるようにしたければ，ローレンツ不変なラグランジアン密度から始めればよいことは質点系の場合と同じである。

質点系の場合と同様に変換 $\phi_a(x) \to \phi_a(x) + \epsilon(x)F(\phi)_a$ を考えて，$\mathcal{L}$ の応答から $\partial_\mu\epsilon(x)$ と $\epsilon(x)$ の係数より，$\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\epsilon)$ と $\partial\mathcal{L}/\partial\epsilon$ を定義すると

$$\begin{aligned}-J^\mu &\overset{\rm def}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\epsilon)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}F_a \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\epsilon} &\overset{\rm def}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}\partial_\mu F_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a}F_a\end{aligned} \tag{3.15}$$

となる。J^μ は変換に対するカレント密度とよばれる量であるが，これの 4 次元発散 $\partial_\mu J^\mu$ を計算してみよう。

$$-\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)}F_a\right]$$

$$= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right] F_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial_\mu F_a$$
$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} \tag{3.16}$$

ここで場のオイラー方程式 (3.14) を使った。場の場合にも $\mathcal{L}$ が時空に依存しない ϵ に対して不変であればカレント密度は保存する ($\partial_\mu J^\mu = 0$) ことが導けた。領域 V で積分した $Q = \int_V \mathrm{d}^3x\, J_0$ を導入すれば，これの時間変化は，

$$\partial^0 Q = \int_V \mathrm{d}^3x\ \partial^0 J_0$$
$$= \int_V \mathrm{d}^3x\ \left(-\partial^i J_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} \right) \tag{3.17}$$
$$= \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{J}\ - \int_V \mathrm{d}^3x\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} \tag{3.18}$$

となる。式 (3.17) の第 1 項はガウスの定理により表面積分に書き換えることができ，V を全空間にとれば表面積分はゼロになるので式 (3.18) 第 2 項のみとなり，$\partial \mathcal{L}/\partial \epsilon = 0$ なら保存する。

次に正準形式に移る。質点系の場合と同様に力学変数 $\phi_a(x)$ の正準共役量を $\pi^a = \partial \mathcal{L}/\partial \dot{\phi}_a$ で導入し，ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}$ を次のように定義する。

$$\mathcal{H}(\pi^a(x), \phi_a(x)) = \pi^a(x)\dot{\phi}_a(x) - \mathcal{L}(\partial_\mu \phi_a(x), \phi_a(x)) \tag{3.19}$$

この $\mathcal{H}$ からは π の定義式を用いて，$\dot{\phi}$ は消去しておく。式 (3.19) を変分し，π の定義式と場のオイラー方程式から

$$\dot{\pi}^a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_a}, \qquad \dot{\phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^a} \tag{3.20}$$

が導かれるのは質点系の場合と同じである。

次に正準交換関係を定義するが，その前に新しい記法を導入しておく。X^a と Y_a の関数 $\mathcal{A}(X^a, Y_a)$ から A を $\int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{A}(\pi^a(x), \phi_a(x))$ で定義して，$\delta A/\delta \pi^a(x)$ や $\delta A/\delta \phi_a(x)$ を次のように定義する。

$$\frac{\delta A}{\delta \pi^a(x)} = \frac{\partial \mathcal{A}(\pi^a(x), \phi_a(x))}{\partial \pi^a(x)}, \qquad \frac{\delta A}{\delta \phi_a(x)} = \frac{\partial \mathcal{A}(\pi^a(x), \phi_a(x))}{\partial \phi_a(x)} \tag{3.21}$$

この表記法から

$$\phi_b(y) = \int \mathrm{d}^3x\ \delta^a_b \delta(y - x) \phi_a(x)$$

であるから，

$$\frac{\delta\phi_b(y)}{\delta\phi_a(x)} = \delta_b^a \delta(y-x) \tag{3.22}$$

となる。δ_b^a はクロネッカー (L.Kronecker) の δ 記号で，$\delta(x)$ はディラックの δ 関数である。このような A や B に対してポアソン (S.D.Poisson) 括弧を

$$\{A,B\} = \int \mathrm{d}^3x \, \left[\frac{\delta A}{\delta\phi_a(x)}\frac{\delta B}{\delta\pi^a(x)} - \frac{\delta A}{\delta\pi^a(x)}\frac{\delta B}{\delta\phi_a(x)}\right] \tag{3.23}$$

と決めて，式 (3.22) に留意すれば，

$$\begin{aligned} \{\phi_a(x), \pi^b(y)\} &= \delta_b^a \delta(x-y) \\ \{\phi_a(x), \phi_b(y)\} &= \{\pi^a(x), \pi^b(y)\} = 0 \end{aligned} \tag{3.24}$$

となる。また，$H = \int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{H}$ でハミルトニアンを定義すれば式 (3.20) は

$$\dot{\pi}^a(x) = \{\pi^a(x), H\}, \qquad \dot{\phi}_a(x) = \{\phi_a(x), H\} \tag{3.25}$$

と表すことができる。場のオイラー方程式 (3.14) が量子論のレベルで実現している理論がほしければ，このハミルトニアン H を用い，正準理論のポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ を場の演算子の交換関係 $[\ ,\ ]/i\hbar$ におき換えればよい。

3.3　相対論的場の方程式

シュレーディンガーはエネルギーと運動量の関係 $E = P^2/2m$ にアインシュタインの量子条件を波動上で表現した式 $E = P_0 = ic\hbar\partial/\partial x_0$ と $P_i = -i\hbar\partial/\partial x_i$ を結合させて彼の方程式を導いたが，量子論が発見された 1925~6 年は相対論が発見されてすでに 20 年の歳月が過ぎていた。当然相対論的な波動方程式が探究された。相対論的エネルギー・運動量の関係はすでに第 1 章で紹介したように，$P_\mu = (E/c, \boldsymbol{P})$ として

$$P^\mu P_\mu + m^2c^2 = 0 \tag{3.26}$$

であった。

ここで約束事であるが，場の理論では式の中に $\hbar$ や c が頻繁に現れるが，これがわずらわしいので単位系を適当に選んで $\hbar = c = 1$ が実現していると考える。

これを自然単位系とよんでいる。$\hbar$ と c に独立な次元の量，例えばエネルギーの単位を加えると単位系は完全に決まる。素粒子論ではエネルギーの単位として GeV がよく使われる。eV は陽子の電荷を 1 として，単位電荷が 1 ボルトの電位差で加速されたときに粒子が受けとる運動エネルギーであるが，1 GeV は 10^9 eV のことである。陽子の静止質量エネルギーが 0.938 GeV となり，ほぼ 1 で都合がよい。この単位系では 1 単位長さは $1\hbar c(\mathrm{GeV})^{-1} = 1.97 \times 10^{-16}$ m，1 単位質量が $1c^{-2}\mathrm{GeV} = 1.78 \times 10^{-27}\mathrm{kg}$，1 単位時間については $1\hbar(\mathrm{Gev})^{-1} = 0.658 \times 10^{-24}$ sec となっている。以下断わらないかぎり $\hbar = c = 1$ とする。

この単位系で $P^\mu = -i\partial^\mu$ となるが，式 (3.26) とこれを組み合せると，波動 ϕ に対する式は

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi = 0 \tag{3.27}$$

となる。これは今日クライン (O.Klein)–ゴルドン (W.Gordon) 方程式とよばれているが，これに対するラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を求めてみると

$$\mathcal{L} = -(\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m^2 \phi^* \phi) \tag{3.28}$$

となる。いま ϕ は複素場と考えているので，ϕ と ϕ^* (ϕ の複素共役量を表す) は独立な場と見なしてよい。このことに留意して場のオイラー方程式 (3.14) を計算すれば容易に式 (3.27) が再現することがわかる。$\phi \to \exp[i\epsilon(x)]\phi(x) \simeq \phi(x) + i\epsilon(x)\phi(x)$ なる変換を考える。$\mathcal{L}$ は定数 ϵ に対し不変なことは自明であるので，この変換に対するカレント密度

$$J^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \epsilon)} = -i(\phi^* \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^* \phi) \tag{3.29}$$

は保存している。$\partial_\mu J^\mu = 0$ は直接方程式 (3.27) を使って確かめることもできる。

式 (3.27) が確率波に対する方程式だとすれば，保存する確率密度は J_0 ということになるが，これを全空間で積分したものは，式 (3.17), (3.18) で確かめたように保存している。しかし，式 (3.29) からもわかるように，正定値にならないので確率解釈ができない。カレントの定義 (3.29) からもわかるように，方程式が 2 階微分なので，カレントの定義に 1 階微分が現れるのだから，1 階微分の相対論的方程式を捜せばよい。このように考えて，ディラックはいわゆるディラック方程式を発見 (1928 年) した。

この当時原子のエネルギー準位の研究から，電子はパウリ統計に従うにもかかわらず，1 つの準位に電子は 2 つ入ることを知られていた。さらに磁場をかけると準位が分れるので，電子には上向きと下向きのスピン状態があるとわかった。この事情を表すのに上向きと下向き用の 2 成分の波動関数を用いる方法をパウリは発見していた。ディラックはこれを拡張して N 成分の波動関数 $\psi_a\,(a = 1, 2, \cdots)$ と 4 個の $N \times N$ 行列 γ^μ を用意して，

$$[(\gamma^\mu)^a_b \partial_\mu + m\delta^b_a]\psi_b = 0 \tag{3.30}$$

を考えた。行列表示をしておけば，$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0$ である。これをディラック方程式といい，ψ はディラック・スピノルとよばれる。この解がクライン–ゴルドン方程式を満たすための γ に対する条件を求めてみると，それはクリフォード (W.K.Clifford) 代数と今日よんでいるものであった。

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{3.31}$$

実際にこの関係があるとディラック方程式からクライン–ゴルドン方程式を導くことができる。

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma^\mu\partial_\mu - m)(\gamma^\nu\partial_\nu + m)\psi \\ &= \left(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right)\psi \\ &= \left(\frac{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu}{2}\partial_\mu\partial_\nu - m^2\right)\psi \\ &= (\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\psi \\ &= (\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\psi \end{aligned} \tag{3.32}$$

ここで 1 行目から 2 行目への式の変形で微分の可換性 $\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\nu\partial_\mu$ を使った。このクリフォード代数を満たす γ は $N = 4$ で実現する。パウリ行列を使って書いておくと便利なので，まずパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}_i\ (i = 1, 2, 3)$ を導入する。

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

すると 4 行 4 列の γ は 2 行 2 列の $\boldsymbol{\sigma}$ を使って

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} i1_2 & 0 \\ 0 & -i1_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_i \\ \boldsymbol{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

表 3.1　スピン，場の種類，素粒子

スピン	場の種類	表される素粒子
0	スカラー	π 中間子，K 中間子，ヒッグス粒子
1/2	スピノル	電子，ミューオン，ニュートリノ，陽子，中性子，クォーク
1	ベクトル	光子，ウィークボソン ($W^{\pm}$, Z^0)
2	テンソル	重力子

と表せる。ここで 1_2 は 2 行 2 列の単位行列である。これがクリフォード代数を満たすことの検証は，まず

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_i = 2\delta_{ij} \tag{3.35}$$

を確かめれば，あとは簡単である。

ディラック方程式については後で詳しく分析するが，この方程式には負のエネルギー解が含まれており，やはり量子論の波動方程式としては使いものにならなかった。クライン–ゴルドン方程式もディラック方程式も波動方程式と見るところに問題があったのであって，クライン–ゴルドン方程式はスカラー場を，ディラック方程式はスピノル場を記述しているとして，場の理論的取扱いをすればどこにも問題はない。この取扱いの中からスピンが半整数 (整数+1/2) の粒子はパウリ統計に，整数スピンの粒子はボース統計になることも導ける。スカラー場はスピンゼロの粒子を表し，スピノル場は 1/2 スピンの粒子を表しており，マクスウェル方程式はスピン 1 の粒子を表していたのである。後で登場する粒子とそのスピン，それを表す場の種類の一覧を表 3.1 にまとめておいた。

第 4 章

場の理論超入門（II）

4.1　スカラー場の理論と粒子像

古典論においては場の変動は波動現象であるが，場を量子論的に取り扱うと粒子像が現れる。これを複素スカラー場 ϕ を例にとって紹介する。

ラグランジアン密度は次の式で与えられた。

$$\mathcal{L} = -(\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m^2 \phi^* \phi) \tag{4.1}$$

ϕ と ϕ^* の正準共役量 π^* と π は

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*, \qquad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^*} = \dot{\phi} \tag{4.2}$$

で与えられ，ハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi \dot{\phi}^* + \pi^* \dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= \pi^* \pi + \partial^i \phi^* \partial_i \phi + m^2 \phi^* \phi \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。交換関係 (3.24) は

$$[\phi(x), \pi^*(y)] = i\delta(x-y), \qquad [\phi^*(x), \pi(y)] = i\delta(x-y) \tag{4.4}$$

と，そのほかはゼロとなることを使うと，

$$\dot{\phi} = \frac{1}{i}[\phi(x), \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{H}] = \pi(x) \tag{4.5}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{i}[\pi(x), \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{H}] = (\partial_i \partial^i - m^2)\phi(x) \tag{4.6}$$

となり，クライン–ゴルドン方程式が量子力学のレベルで実現している。式 (4.6) の計算で 1 度部分積分を行った。

式 (4.6) の解は

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}} \times \{a(\boldsymbol{k}) \exp[i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega(\boldsymbol{k})t] + b^*(\boldsymbol{k}) \exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + i\omega(\boldsymbol{k})t]\} \tag{4.7}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}} \times \{a(\boldsymbol{k}) \exp[ik^\mu x_\mu] + b^*(\boldsymbol{k}) \exp[-ik^\mu x_\mu]\} \tag{4.8}$$

となる。これは直接式 (4.6) に代入してみれば確かめられる。ここで $k_0 = \omega(\boldsymbol{k}) = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{k}^2}$ である。$\exp[ik^\mu x_\mu]$ の部分を正振動，$\exp[-ik^\mu x_\mu]$ を負振動部分とよぶ。a や b^* は積分定数であるが，場 ϕ が演算子なので，a や b^* が演算子となる。ϕ たちの交換関係を a や b^* の関係に直してみると

$$[a(\boldsymbol{k}), a^*(\boldsymbol{k}')] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \qquad [b(\boldsymbol{k}), b^*(\boldsymbol{k}')] = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \tag{4.9}$$

となる。式 (4.7) の因子 $\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})}$ は交換関係がこのように簡単になるよう前もって分離しておいたのである。この計算は，逆フーリエ変換の公式 $(1/2\pi)\int \mathrm{d}k \exp[ik(x-x')] = \delta(x-x')$ に注意すれば，容易である。またハミルトニアンをこの a たちで表せば，

$$H = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{H}$$

$$= \int \mathrm{d}^3k\, \omega(\boldsymbol{k})[a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + b(\boldsymbol{k})b^*(\boldsymbol{k})] \tag{4.10}$$

$$= \int \mathrm{d}^3k\, \omega(\boldsymbol{k})[a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}) + b(\boldsymbol{k})b^*(\boldsymbol{k})] + \int \mathrm{d}^3k\, \omega(\boldsymbol{k})[b(\boldsymbol{k})\, b^*(\boldsymbol{k})] \tag{4.11}$$

と書ける。式 (4.11) の第 2 項は無限大ではあるが定数であるので，初めにラグランジアンにこれを打ち消す定数があったとすれば無視してよい。第 2 章で紹介した，調和振動子の個数演算子と生成・消滅演算子の話を思い出し，交換関係 (4.9) とハミルトニアン (4.11) に注目していただけば，このスカラー場の理論は $\boldsymbol{k}$ でラベルされた無限個の調和振動子 (a と b の 2 種類有ある) の集まりであるこ

とがわかる。そして $a(\boldsymbol{k})$ と $b(\boldsymbol{k})$ は消滅演算子，$a^*(\boldsymbol{k})$ と $b^*(\boldsymbol{k})$ は生成演算子，$N_a(\boldsymbol{k}) = a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$ と $N_b = b^*(\boldsymbol{k})b(\boldsymbol{k})$ は個数演算子 ($\boldsymbol{k}$ でラベルされたものの) である。また式 (4.11) から振動子を 1 個励起するに必要なエネルギーは $\sqrt{m^2+\boldsymbol{k}^2}$ であることがわかる。これは質量 m の粒子が運動量 $\boldsymbol{k}$ をもった状態と見ることができる。

実際に調和振動子の例にならって，$a(\boldsymbol{k})|0\rangle = b(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$ で真空状態を定義し，$|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_m\boldsymbol{l}_1\cdots\boldsymbol{l}_n\rangle = a^*(\boldsymbol{k}_1)\cdots a^*(\boldsymbol{k}_m)b^*(\boldsymbol{l}_1)\cdots b^*(\boldsymbol{l}_n)|0\rangle$ を導入して，これのエネルギーを調べてみよう。交換関係 (4.9) と真空状態の定義に留意すれば，簡単な計算で

$$
\begin{aligned}
&H|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_m\boldsymbol{l}_1\cdots\boldsymbol{l}_n\rangle \\
&\quad = [\omega(\boldsymbol{k}_1)+\cdots+\omega(\boldsymbol{k}_m)+\omega(\boldsymbol{l}_1)+\cdots+\omega(\boldsymbol{l}_n)]|\boldsymbol{k}_1\cdots\boldsymbol{k}_m\boldsymbol{l}_1\cdots\boldsymbol{l}_n\rangle
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

を示すことができる。一般の 2 粒子状態は $\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\psi(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)|\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\rangle$ と表されて，ψ は運動量表示の 2 粒子の波動関数ということになる。$a^*(\boldsymbol{k}_1)$ と $a^*(\boldsymbol{k}_2)$ が可換であることより，波動関数 $\psi(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)$ は $\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ の入れ換えに対して対称となる。すなわちボース統計に従っている。

次に 1 粒子状態 $|\psi\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{l}\ \psi(\boldsymbol{l})|\boldsymbol{l}\rangle$ の内積を計算してみよう。

$$
\langle\psi|\psi\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{l}'\mathrm{d}\boldsymbol{l}\ \psi^*(\boldsymbol{l}')\langle 0|b(\boldsymbol{l}')b^*(\boldsymbol{l})|0\rangle \tag{4.13}
$$

$$
= \int \mathrm{d}\boldsymbol{l}'\mathrm{d}\boldsymbol{l}\ \psi^*(\boldsymbol{l}')\psi(\boldsymbol{l})\langle 0|[b(\boldsymbol{l}'),b^*(\boldsymbol{l})]+b^*(\boldsymbol{l})b(\boldsymbol{l}')|0\rangle \tag{4.14}
$$

$$
= \int \mathrm{d}\boldsymbol{l}\ \psi^*(\boldsymbol{l}')\psi(\boldsymbol{l}) \tag{4.15}
$$

ここで b と b^* の交換関係 (4.9) ならびに真空状態の定義 $b|0\rangle = 0$ を使った。

この議論から学べることが 2 つある。1 つはこの種の計算をくり返せば真空から a^* や b^* を作用してつくった状態の内積は交換関係と真空の性質のみから計算できるということである。もう 1 つは正しい答を知っているので初めから式 (4.7) で $\phi \simeq a+b^*$ とおいたが，なぜ $\phi \simeq a+b$ ではいけないかという問題である。こうおいて計算することは，交換関係 (4.9) の中で b と b^* を入れ換えることになるので，交換関係の符号が逆転し，$\langle\psi|\psi\rangle \leq 0$ となってしまい，負の確率が生じて

量子力学にならない。後で議論することになるディラック場の場合のプラス型の交換関係 $[\quad,\quad]_+$ をこのスカラー場の場合に使ってみると，同様に負の確率の困難が生じる。こうしてスカラー場はフェルミ統計にできないことがわかる。

次に a と b の関係を見てみよう。手掛りは保存カレント密度 (3.29) である。荷電 Q を a たちで表してみよう。

$$
\begin{aligned}
Q &= \int \mathrm{d}^3x \ J_0 = i \int \mathrm{d}^3x \ (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi) \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \ [a^*(\boldsymbol{k}) a(\boldsymbol{k}) - b^*(\boldsymbol{k}) b(\boldsymbol{k})] \\
&= \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \ [N_a(\boldsymbol{k}) - N_b(\boldsymbol{k})]
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Q が保存するということは，式 (4.16) より a^* でつくられた粒子に粒子数 1 を，b^* に対して -1 を付与するとそれが保存することを示している。実際にこのスカラー場を電磁場と作用させてみると，a^* でつくられる粒子は荷電 1 を，b^*が生成する粒子は -1 の荷電をもつことを確かめることができる。以下，a^* がつくる状態を粒子とよんだとき，b^* が生成するものを反粒子とよぶことにする。もう少し正確にいえば，局所的な場 (4.4) は a や b から単独ではつくれない。式 (4.7) の組合せが唯一である。だから局所的に相互作用している理論ではこの場 ϕ が基本になる。この場 ϕ が状態に作用してある量子数を ΔL だけ変化させたとしよう。すると，a は消滅したときに ΔL だけ変化させるのであり，b^* は生成したときに同じだけ変化させる。こうみると a と b はちょうど裏表の関係にあるので，お互いに反粒子の関係にあるといわれるのである。

いままで ϕ は複素場であるとしてきたが，これを実場としたら何が起こるであろうか？ これは簡単で $\phi^*(x) = \phi(x)$ としてみればよい。これは式 (4.7) から $a = b$ と読みとれる。すなわち，実場では粒子と反粒子の区別がないのである。光子は実場で記述されるので，荷電のような量子数はもてない。また，$\phi \to \phi^*$ のおき換えは $a \to b$, $b \to a$ を意味するので荷電変換とも粒子–反粒子変換ともよばれ，$\phi^{\mathrm{c}} = \phi^*$ と表される。クライン–ゴルドン方程式に正振動解と負振動解があったことが，粒子–反粒子の概念が生まれるもとであった。このことからもわかるように粒子–反粒子の自由度は時空とたいへん関係が深い概念である。

4.2　スピノルとローレンツ変換

ディラックの γ はクリフォード代数を満たすといったが，ここではまずクリフォード代数とローレンツ変換のかかわりの話題から始めよう。

クリフォード代数を満たす具体例は (3.34) で与えたが，逆行列をもつ 4×4 行列 Λ があれば，γ^μ が代数を満たせば，新たに $\bar{\gamma}^\mu = \Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda$ も同じ代数を満たすことは自明である。逆にクリフォード代数を満たす 2 つの $\bar{\gamma}^\mu$ と γ^μ は Λ があって，$\bar{\gamma}^\mu = \Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda$ とできる。この証明の概略を次ページの囲みに示しておいたので，関心のある人は見てほしい。

この事実の重要な応用にローレンツ変換とディラック・スピノルの関係の議論がある。ローレンツ変換 $a^\mu{}_\nu$ $(a\eta a^{\mathrm{t}} = \eta)$ があるとき，クリフォード代数を満たす γ^μ に対して，新たに $\bar{\gamma}^\mu = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ と決める。これがクリフォード代数を満たす。

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^\mu\bar{\gamma}^\nu + \bar{\gamma}^\nu\bar{\gamma}^\mu &= a^\mu{}_\sigma a^\nu{}_\rho(\gamma^\sigma\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\sigma)\\ &= a^\mu{}_\sigma a^\nu{}_\rho 2\eta^{\sigma\rho} = 2\eta^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{4.17}$$

このことはローレンツ変換 a に対して常に Λ があって

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{4.18}$$

と表せることを意味している。2 つの Λ_1 と Λ_2 が同じローレンツ変換 a を与えたとしよう。すると，${\Lambda_2}^{-1}\Lambda_1$ は γ^μ と可換であることがいえる。囲みで示したように，γ^μ と可換であることは全行列と可換であることを意味するので，それは定数 c となり，$\Lambda_1 = c\Lambda_2$ がいえる。

この式 (4.18) をもう少し詳細に調べてみよう。ここで γ は例 (3.34) のように $\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3$ はエルミートに，γ^0 は反エルミートにとっておく。$\gamma^4 = -i\gamma^0$ はエルミートである。すると，

$$\gamma^4\gamma^{\mu*}\gamma^4 = -\gamma^\mu \tag{4.19}$$

の性質がある。$\gamma^\mu\Lambda = \Lambda a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ と書き換えてみて，これのエルミート共役をとると，$\Lambda^*\gamma^{\mu*} = a^\mu{}_\nu\gamma^{\nu*}\Lambda^*$ となるが，式 (4.19) に注意すれば，$\gamma^4\Lambda^*\gamma^4\gamma^\mu = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu\gamma^4\Lambda^*\gamma^4$

クリフォード代数の一意性

本文中では $\eta^{\mu\nu}$ を用いたが，$\gamma^0 \to i\gamma^4$ とすれば，η はクロネッカーの δ に換わるので，ここではこのタイプを使う。

$\xi\,(\mu=1,2,\cdots,N)$ に $\xi^\mu\xi^\nu+\xi^\nu\xi^\mu=2\delta^{\mu\nu}$ なる関係式があれば，ξ はクリフォード代数をなすという。N が偶数ならば，クリフォード代数の既約表現はすべて同型である。$N=4$ の場合について，同主旨である次の定理の概略証明 (パウリによる) を示す。一般化は自明である。

定　理

2 組の 4 行 4 列の行列 γ^μ と $\bar{\gamma}^\mu$ $(\mu=1,2,3,4)$ がそれぞれクリフォード代数を満たすなら，行列 Λ があって，$\bar{\gamma}^\mu=\Lambda\gamma^\mu\Lambda^{-1}$ と表せる。

証明の概略

(1) $1, \gamma^\mu, i\gamma^\mu\gamma^\nu(\mu<\nu), i\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda(\mu<\nu<\lambda), \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ に通し番号をつけて $\gamma^A\,(A=0,1,2,\cdots,15)$ と表すことにする。$\gamma^0=1, \gamma^5=\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ とした。$(\gamma^A)^2=1$ である。

(2) $\gamma^\mu\,(\mu=1,2,3,4)$ の任意個の積は $c\gamma^A\,(|c|=1)$ と書ける。とすると A と B に対し数 $C(A,B)$ があって，$\gamma^A\gamma^B=g(A,B)\gamma^{C(A,B)}$ と書け，$C(A,B)=C(B,A)$ である。ここで $g(B,A)=g(A,B)^{-1}$ が成り立つ。なぜなら，$1=\gamma^A\gamma^B\gamma^B\gamma^A=g(A,B)g(B,A)$ であるから。また，$0=C(A,B)$ なら $A=B$ である。

(3) $A\neq 0$ なら $\mathrm{Tr}\,\gamma^A=0$ である。これは $(\gamma^\mu)^2=1$ と $\gamma^\mu\gamma^\nu=-\gamma^\nu\gamma^\mu\,(\mu\neq\nu)$ の関係式に留意して，$\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu)^2(\cdots)=\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu(\cdots)\gamma^\mu$ や $\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu(\cdots)=\mathrm{Tr}\,(\cdots)\gamma^\mu$ の関係を用いると示すことができる。ゆえに，$\sum_{A=0}^{15}c_A\gamma^A=0$ なら，これに γ^B を乗じて，それの Tr をとれば $c_B=0$ を得る。ゆえに，γ^A は 1 次独立。4×4 行列は 16 次元ベクトル空間であるから，γ^A はこの空間の基底となり，任意の行列は $\sum_A a_A\gamma^A$ と表現できる。以下 $\sum_{A=0}^{15}$ を $\sum_A$ と略記する。

(4) 任意の 4×4 行列 M と N を用意して，$F=\sum_A\bar{\gamma}^A M\gamma^A$ と $G=\sum_A\gamma^A N\bar{\gamma}^A$ を定義する。$F\gamma^B=\bar{\gamma}^B\sum_A\bar{\gamma}^B\bar{\gamma}^A M\gamma^A\gamma^B=\bar{\gamma}^B\sum_A g(B,A)\bar{\gamma}^{C(B,A)}M\,g(A,B)\gamma^{C(A,B)}$ であり，B を固定して A を 0 から 15 まで走らせば，$C(A,B)$ も 0 から 15 までのすべての値をとるので，(2) の事実に留意すれば $F\gamma^A=\bar{\gamma}^A F$ を得る。同様に $G\bar{\gamma}^A=\gamma^A G$。$F$ に逆行列があれば，$\bar{\gamma}^A=F\gamma^A F^{-1}$ で証明は完了。

(5) $GF\gamma^A=\gamma^A GF$ と事実 (3) より，GF はすべての行列と可換だから，$GF=a(M,N)1$ となる。いかなる M と N に対しても $a=0$ なら，$(GF)_{il}$ を M_{jk} で微分してみると，$\sum_A(G\bar{\gamma}^A)_{ij}(\gamma^A)_{kl}=0$ を得る。γ^A の 1 次独立性より $G\bar{\gamma}^A=0$ が結論され，$G=0$ となる。$G=0$ から同様にして $(\gamma^A)_{ij}=0$ が導かれて矛盾。故にある M と N があって $a(M,N)\neq 0$ とできる。

(q.e.d.)

となる。この式に左辺から Λ を乗ずると

$$\Lambda\gamma^4\Lambda^*\gamma^4\gamma^\mu = (\Lambda a^\mu{}_\nu\gamma^\nu)\gamma^4\Lambda^*\gamma^4 = (\gamma^\mu\Lambda)\gamma^4\Lambda^*\gamma^4 \tag{4.20}$$

を得る。$\Lambda\gamma^4\Lambda^*\gamma^4$ が γ^μ と可換であるので定数 c であり，$\Lambda\gamma^4\Lambda^* = c\gamma^4$ がいえる。左辺と γ^4 はエルミートなので c は実数である。ここで $\Lambda/\sqrt{|c|} \to \Lambda$ とおき換えてもいままでの議論は変らないので，$c = \pm 1$ とし，以下では ϵ_0 で表すことにする。

$$\Lambda\gamma^4\Lambda^*\gamma^4 = \epsilon_0 \tag{4.21}$$

次にこの ϵ_0 の符号は時間反転と関係していることを示す。ローレンツ変換 $a^\mu{}_\nu$ は $a\eta a^{\mathrm{t}} = \eta$ を満たすので，これの $(0,0)$ 成分を考えると

$$\begin{aligned} -1 = a^0{}_\sigma a^0{}_\rho\eta^{\sigma\rho} &= -(a^0{}_0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(a^0{}_i)^2 \\ &\geq -(a^0{}_0)^2 \end{aligned} \tag{4.22}$$

となり，$a^0{}_0 \geq 1$ か $a^0{}_0 \leq -1$ であることを示している。また，$a\eta a^{\mathrm{t}} = \eta$ より $\det a = \pm 1$ がいえる。これらの符号はローレンツ変換の連続変形では移り変れないので，ローレンツ変換には 4 つの非連結成分があることがわかる。$\det a$ と $a^0{}_0$ の符号をそれぞれ ϵ_1 と ϵ_2 として，その非連結成分を $\mathrm{L}_{\epsilon_1\epsilon_2}$ で示すことにする。時間反転 T を $x^i \to x^i$, $x^0 \to -x^0$，空間反転 (パリティ変換) P を $x^i \to -x^i$, $x^0 \to x^0$ とすれば，$T \in \mathrm{L}_{--}$, $P \in \mathrm{L}_{-+}$ となる。L_{++} は狭義のローレンツ変換とよばれる。P 変換の際の Λ は γ^4 である。実際に $\gamma^4\gamma^i\gamma^4 = -\gamma^i$, $\gamma^4\gamma^4\gamma^4 = \gamma^4$ である。

$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ を定義して，$\Lambda^{-1}\gamma^5\Lambda$ を計算する。完全反対称テンソル $\epsilon_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3}$ $(\epsilon_{0123} = 1)$ を使うと

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}\gamma^5\Lambda &= \Lambda^{-1}\left(\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3}\gamma^{\mu_0}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\right)\Lambda \\ &= \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3}a^{\mu_0}{}_{\nu_0}a^{\mu_1}{}_{\nu_1}a^{\mu_2}{}_{\nu_2}a^{\mu_3}{}_{\nu_3}\gamma^{\mu_0}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3} \qquad (4.23) \\ &= \det a\gamma^5 = \epsilon_1\gamma^5 \qquad (4.24) \end{aligned}$$

となる。式 (4.23) から式 (4.24) への変形では，和をとるとき $\nu_0\cdots\nu_3$ に同じ値が現れるときは，ϵ テンソルの反対称性でゼロになることと，行列式の定義を使った。

次に $\epsilon_0 = \epsilon_2$ を示そう。$\Lambda^{-1} = \epsilon_0\gamma^4\Lambda^*\gamma^4$ より，$\epsilon_0\gamma^4\Lambda^*\gamma^4\gamma^0\Lambda = a^0{}_\nu\gamma^\nu$ となるが，これに左辺より γ^4 を乗じてトレースをとる。このとき $\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu) = (1/2)\mathrm{Tr}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = 4\eta^{\mu\nu}$ に注意すると，

$$i\epsilon_0 \mathrm{Tr}\,\Lambda^*\Lambda = ia^0{}_0\mathrm{Tr}\,1 = 4ia^0{}_0 \tag{4.25}$$

となり，$\mathrm{Tr}\,\Lambda^*\Lambda > 0$ より，$\epsilon_0 = \epsilon_2$ が結論される。

時間反転は量子力学では反ユニタリー演算子で表現されるので特別の注意が必要であるから，ここでは立ち入らないことにするが，場の理論では CPT 定理があって，時間反転はこの後で紹介する荷電変換 (粒子–反粒子変換) C と空間反転 P を使って $T = CP$ と表されるので特に不都合はない。以下では $\epsilon_0 = 1$ として話を進める。よって $\Lambda\gamma^4\Lambda^*\gamma^4 = 1$ より次の式を得る。

$$\Lambda^{-1} = \gamma^4\Lambda^*\gamma^4 \tag{4.26}$$

4.3　スピノルの変換性

ローレンツ変換 a に対して，式 (4.18) より Λ が決まったが，ディラック・スピノルのローレンツ変換性を $\psi' = \Lambda\psi$ と決めよう。このとき $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^4$ を導入すると，

$$\begin{aligned}\bar{\psi}' &= \psi^*\Lambda^*\gamma^4 \\ &= \psi^*\gamma^4\gamma^4\Lambda^*\gamma^4 = \bar{\psi}\Lambda^{-1}\end{aligned} \tag{4.27}$$

となり，$\bar{\psi}\psi$ は不変である。また，これは次の式を導く。

$$\begin{aligned}\bar{\psi}'\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_s}\psi' &= \bar{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_s}\Lambda\psi \\ &= a^{\mu_1}{}_{\nu_1}\cdots a^{\mu_s}{}_{\nu_s}\bar{\psi}\gamma^{\nu_1}\cdots\gamma^{\nu_s}\psi\end{aligned} \tag{4.28}$$

γ は常に $\bar{\psi}$ と ψ で挟まれているものとすれば，この式は，γ^μ がベクトルの，γ^5 は擬スカラーの変換 (4.24) をすることを示している。ここで擬スカラーとは，狭義ローレンツ変換のもとでスカラーでかつ空間反転のもとで符号を変えるものをいう。

ここで荷電変換 C を定義しよう。これはディラック場を量子論的に取り扱ってみると，粒子と反粒子を入れ換える変換になっているので，粒子–反粒子変換ともよばれる。γ^μ がクリフォード代数を満たせば，$\bar{\gamma}^\mu$ もクリフォード代数を満たすのを見るのはやさしい。ゆえに ${C_\gamma}^{-1}\gamma^\mu C_\gamma = -(\gamma^\mu)^{\mathrm{t}}$ なる C_γ が存在する。その具体的な形は γ の具体形が決まらないと定まらない。γ として式 (3.34) を用いることにすれば $C_\gamma = \gamma^2$ でよいことは簡単に確認できる。

ここで C_γ の役割を見るために，$\Lambda\gamma^\mu = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu\Lambda$ の転置をとると，$(\gamma^\mu)^{\mathrm{t}}\Lambda^{\mathrm{t}} = \Lambda^{\mathrm{t}}a^\mu{}_\nu(\gamma^\nu)^{\mathrm{t}}$ となる。これを C_γ を使って書き直してみると ${C_\gamma}^{-1}\gamma^\mu C_\gamma\Lambda^{\mathrm{t}} = \Lambda^{\mathrm{t}}a^\mu{}_\nu{C_\gamma}^{-1}\gamma^\nu C_\gamma$ となり，

$$\gamma^\mu C_\gamma\Lambda^{\mathrm{t}}{C_\gamma}^{-1} = C_\gamma\Lambda^{\mathrm{t}}{C_\gamma}^{-1}a^\mu{}_\nu\gamma^\nu = C_\gamma\Lambda^{\mathrm{t}}{C_\gamma}^{-1}\Lambda\gamma^\mu\Lambda^{-1} \tag{4.29}$$

を得る。これは前と同じく $C_\gamma\Lambda^{\mathrm{t}}{C_\gamma}^{-1}\Lambda = c$ を意味している。ここでは c が複素数でも問題なく再規格化できるので，$C_\gamma\Lambda^{\mathrm{t}}{C_\gamma}^{-1} = \Lambda^{-1}$ と考えてよく，$C_\gamma(\Lambda^{-1})^{\mathrm{t}}{C_\gamma}^{-1} = \Lambda$ となる。

これで粒子と反粒子を入れ換える変換を定義する準備ができた。スカラー場の場合，これは正振動と負振動の役割を入れ換えること，$\phi^{\mathrm{c}} = \phi^*$ だと説明したが，ここで $\psi^{\mathrm{c}} = \psi^*$ とすると両辺でローレンツ変換性が違ってしまう。そこで ψ^* の線形結合をつくって ψ と同じ変換性をもつものを捜す。この答は $\psi^{\mathrm{c}} = \epsilon_{\mathrm{c}}C_\gamma(\bar{\psi})^{\mathrm{t}}$ である。$C^2 = 1$ なので，$(\psi^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = \psi$ であるためには $\epsilon^*\epsilon = 1$ が必要になる。ψ^{c} のローレンツ変換性は

$$\psi^{\mathrm{c}\prime} = \epsilon_{\mathrm{c}}C_\gamma(\bar{\psi}')^{\mathrm{t}} = \epsilon_{\mathrm{c}}C_\gamma(\bar{\psi}\Lambda^{-1})^{\mathrm{t}} = C_\gamma(\Lambda^{-1})^{\mathrm{t}}{C_\gamma}^{-1}\psi^{\mathrm{c}} = \Lambda\psi^{\mathrm{c}} \tag{4.30}$$

となり，ψ と同じである。そして，$\psi \to \psi^{\mathrm{c}}$ が求める変換である。ディラック場を量子論的に取り扱ってみると，後で見るように，実際に粒子と反粒子を入れ換える変換になっている。

実スカラー場では粒子と反粒子の区別がないと説明したが，スピノル場の場合にこれに当たるのがマヨラナ (E.Majorana) 場である。想像の通りこの条件は $\psi = \psi^{\mathrm{c}} = \epsilon_{\mathrm{c}}C_\gamma(\bar{\psi}^{\mathrm{t}})$ である。

次に荷電共役 C とパリティ変換 C の関係をみよう。ψ をパリティ変換した結果が $\psi^{\mathrm{p}} = \epsilon_{\mathrm{p}}\gamma^4\psi\,({\epsilon_{\mathrm{p}}}^2 = 1)$ で与えられているとしよう。このとき，ψ^{c} のパリティ

変換は次のようになる。

$$(\psi^{\rm c})^{\rm p} = \epsilon_{\rm c}\epsilon_{\rm p} C_\gamma (\psi^* \gamma^4 \gamma^4)^{\rm t} = \epsilon_{\rm c}\epsilon_{\rm p} C_\gamma (\gamma^4)^{\rm t} {C_\gamma}^{-1} C_\gamma (\bar{\psi})^{\rm t}$$
$$= -\epsilon_{\rm p} \gamma^4 \psi^{\rm c} \tag{4.31}$$

この式の正確な意味については粒子像がつくってないのでいまは語れないが，粒子と反粒子の入れ換えで，パリティの値が変るということは，粒子と反粒子の相対パリティが逆であることを意味している。

スピノルの話題の最後に，狭義ローレンツ変換とディラック・スピノルの関係について説明する。$a \in \mathrm{L}_{++}$ なら，これに対応する Λ は $\Lambda^{-1}\gamma^5\Lambda = \gamma^5$の性質があった。すなわち，$\Lambda$ と γ^5 は可換である。また，$(\gamma^5)^2 = 1$ なので γ^5 の固有値は ± 1 である。この固有状態は $\psi_\pm = [(1 \pm \gamma^5)/2]\psi$ である。実際，$\gamma^5\psi_\pm = \gamma^5[(1 \pm \gamma^5)/2]\psi = \pm[(1 \pm \gamma^5)/2]\psi$ である。

この固有値は狭義ローレンツ変換で混じり合うことはない。${\psi_\pm}' = \Lambda\psi_\pm = [(1 \pm \gamma^5)/2]\Lambda\psi$。任意の ψ は $\psi = \psi_+ + \psi_-$ と分解できるが，ψ_+ を右成分，ψ_- を左成分とよび $\psi_{\rm R}$ と $\psi_{\rm L}$ で表すことが多い。素粒子論ではパリティ非保存の問題と関係してたいへん重要な概念である。

左右の成分の性質を見やすくするために，γ^5 が対角行列になっている γ の行列表示を以下用いることにする。

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & i{\sigma_\uparrow}^\mu \\ i{\sigma_\downarrow}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad {\sigma_\uparrow}^\mu = (-1_2, \sigma_i), \quad {\sigma_\downarrow}^\mu = (1_2, \sigma_i) \tag{4.32}$$

これがクリフォード代数を満たすことは，例 (3.34) の場合を参考にすれば容易である。また表記法も同じである。この γ^μ を用いて γ^5 を計算すると

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

となる。ディラック・スピノルの上の 2 成分が右成分で，下 2 成分が左成分ということになる。Λ を 2 行 2 列の行列 f, g, h, k を使って表し，γ^5 と可換である条件を求めてみると

$$\Lambda\gamma^5 = \begin{pmatrix} f & h \\ k & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & -h \\ k & -g \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

$$\gamma^5\Lambda = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & h \\ k & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & h \\ -k & -g \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

これで $h=k=0$ がわかる。$\Lambda^{-1}=\gamma^4\Lambda^*\gamma^4$ の条件は

$$\begin{pmatrix} f^{-1} & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^* & 0 \\ 0 & g^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

となり，$f^{-1}=g^*$ である。$a\,(\in \mathrm{L}_{++})$ に対応する Λ には定数倍の不定性があった。これを使うと g の行列式は 1 としてよい。$g \in SL(2,C)$。

以下で頻繁に現れるので，ここで行列で表される群 (積と逆元が定義された集合) の名前の付け方を紹介しておこう。要素が複素数であり，行列式がゼロでない $N\times N$ 行列の集合を $GL(N,C)$，このうち行列式が 1 であるものの集合は $SL(N,C)$ と表記する。G は general の G である。S は special の S であり，行列式が 1 であることを表すときに使う。ユニタリー行列の集合は $U(N)$，行列式が 1 であれば $SU(N)$ となる。空間回転は $O(N)$。行列要素が自明のときはいちいち R とか C を書かない。

$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = a^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ はいまの場合，

$$g^*\sigma_\uparrow{}^\mu g = a^\mu{}_\nu\sigma_\uparrow{}^\nu, \qquad g^{-1}\sigma_\downarrow{}^\mu(g^*)^{-1} = a^\mu{}_\nu\sigma_\downarrow{}^\nu \tag{4.37}$$

と書けるが，$\epsilon_2=i\sigma_2$ とすると，$\sigma_\downarrow{}^\mu=\epsilon_2\bar\sigma_\uparrow^\mu\epsilon_2$ と書け，また $g\in SL(2,C)$ のとき，$g^{-1}=\epsilon_2 g^{\mathrm{t}}\epsilon_2{}^{-1}$ と表されるので，これを使うと 2 つの式は等価であることがわかる。ここで $\bar\sigma$ は σ の複素共役行列を表す。

ここでディラック・スピノルの上の 2 成分を η で，下の 2 成分を ξ で表す。ローレンツ変換 a のもとで，$\eta\to(g^*)^{-1}\eta$，$\xi\to g\xi$ と変換されることになる。この ξ の変換性に従うものを 2 成分スピノルとよび，η は複素反傾スピノルとよばれている。

ここでさらに時間軸を不変にする a，言い換えると空間回転である a に制限すると，$g^*\sigma_\uparrow{}^0 g = g^*(-1_2)g = -1_2$ より g はユニタリー行列で，$SU(2)$ の元となる。このとき $(g^*)^{-1}=g$ となるので複素反傾表現スピノルとスピノルの区別はなくなる。変換 $g\,(\in SU(2))$ に対して，$\eta' = g\eta$ として，3 次元ベクトル $\eta^*\sigma^i\eta$ の変換性を見てみよう。

$$\eta^{*'}\sigma^i\eta' = \eta^* g^* \sigma^i g\eta = a^i{}_j \eta^* \sigma^j \eta \tag{4.38}$$

これはスピノル 2 つからベクトルの変換性を示す量がつくられたことになる。ベクトル量は角運動量が 1 なので，2 つで 1 のものをつくったのだからスピノル量の角運動量は 1/2 ということになる。詳しい話は後の章でする。

この $SU(2)$ は空間回転と結びついていたが，ハイセンベルクは彼の原子核構造論の中で，抽象的な空間での回転を考え，その回転に対応したスピンをアイソスピンとよんだ。この考えは後に紹介する。

第 5 章 ディラックと電子論

5.1 ディラック方程式とその解

ディラックは相対論の要請を満たしたシュレーディンガー方程式をつくる目的で，いわゆるディラック方程式 (3.30) を発見した (1928 年)。この方程式の性質を少し調べてみよう。$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi = 0$ をシュレーディンガー方程式風に書き直してみる。左辺から $-\mathrm{i}\gamma^0$ を乗じて，時間微分の項を移行すると，

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \boldsymbol{H}\psi, \qquad \boldsymbol{H} = -i\alpha \cdot \partial + m\beta \tag{5.1}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -i\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

となる。ここでディラックの記法に従い $\beta = -i\gamma^0$, $\alpha_i = \gamma^0\gamma^i$ を用い，γ の具体型は式 (3.34) を採用した。この α_i と β の 4 つで，η を クロネッカーの δ でおき換えたクリフォード代数を満たしている。この方程式の平面波解を求めるために $V \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - iEt)$ を式 (5.1) に代入してみる。

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})V = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{k} + m\beta)V = EV \tag{5.3}$$

この方程式が解をもつ条件は，$\det(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{k} + m\beta - E) = 0$ と表せるが，これは簡単な計算で $E = \pm\omega(\boldsymbol{k}) = \pm\sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$ となる。このときの解 V は E の符号に

対応して 2 つずつあり，それらを 4 行 2 列の行列 $V_\pm$ で表すと，

$$
\begin{aligned}
V_+ &= c\begin{pmatrix} \{\omega(\boldsymbol{k})+m\}1_2 \\ -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} \end{pmatrix} \\
V_- &= c\begin{pmatrix} -i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} \\ \{\omega(\boldsymbol{k})+m\}1_2 \end{pmatrix} \\
c &= \frac{1}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{k})[\omega(\boldsymbol{k})+m]}}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

となる。規格化定数 c は後で現れる式が簡単になるようにとってある。これが解であることは，これを直接式 (5.3) に代入し，$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})^2=\boldsymbol{k}^2$ に留意すれば，簡単に確かめられる。

ディラック方程式 (5.1) の一般解はいま求めた平面波解の重ね合せで表すことができるが，後の便利のために $V_\pm$ の代りに u と v を使うことにする。$V_\pm$ は運動量 $\boldsymbol{k}$ に依存した 4 行 2 列の行列であるが，$V_+(\boldsymbol{k})$ の第 1 列を $u^{(1)}(\boldsymbol{k})$，第 2 列を $u^{(2)}(\boldsymbol{k})$ とし，$V_-(\boldsymbol{k})$ の第 1 列を $-v^{(2)}(\boldsymbol{k})$，第 2 列を $v^{(1)}(-\boldsymbol{k})$ と定義しよう。行列表示をすれば

$$
\begin{aligned}
V_+(\boldsymbol{k}) &= (u^{(1)}(\boldsymbol{k}),\ u^{(2)}(\boldsymbol{k})) \\
V_-(\boldsymbol{k}) &= (v^{(1)}(-\boldsymbol{k}),\ v^{(2)}(-\boldsymbol{k}))\ \epsilon_2 \\
\epsilon_2 &= i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

となる。一般解は

$$
\begin{aligned}
\psi = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \sum_{s=1}^{2}&[a_s(\boldsymbol{k})u^{(s)}(\boldsymbol{k})\exp(ik^\mu x_\mu) \\
&+b_s^*(\boldsymbol{k})v^{(s)}(\boldsymbol{k})\exp(-ik^\mu x_\mu)]
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

である。k_μ はスカラー場の時と同じで $(\omega(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k})$ である。ここで a と b^* は積分定数であり，後の便利のために b には $*$ をつけておいた。また第 2 項は積分変数を $\boldsymbol{k}$ から $-\boldsymbol{k}$ に変えた。

5.2 ディラックの空孔仮説と陽電子

式 (5.1) をシュレーディンガー方程式とみて，$\boldsymbol{H}$ をハミルトニアンと見立てれば，V_- は $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})V_- = -\omega(\boldsymbol{k})V_-$ なので負のエネルギー解ということになる。底無しの負エネルギー状態があると電子は光子を放出してどこまでも低いエネルギー状態に遷移してゆくので，この世の安定性が保証できなくなるという困難にディラックは遭遇した。ここでディラックは，1 つの状態には 2 個以上入れないという電子のパウリ統計性に注目した。そして真空は負のエネルギー状態がすべて電子で埋まった状態であると仮定した。とすれば，光子が負のエネルギー状態の電子を励起して正エネルギー状態にしたとすれば，真空に負のエネルギー状態が 1 つ埋まっていない状態 (空孔) ができる (図 5.1)。これは真空に比べて電子 1 個分の電荷が少ない正のエネルギー状態なので，正の電荷をもった粒子として見えるはずであり，それは陽子である，とディラックは主張した。これをディラックの空孔仮説 (1929 年) とよぶ。電子と陽子の質量の違いは負のエネルギー状態を埋め尽くした電子との電磁気的力により生じるとディラックは考えた。

ディラックの説に対してハイゼンベルクはすぐに手紙を書き，質量は等しくな

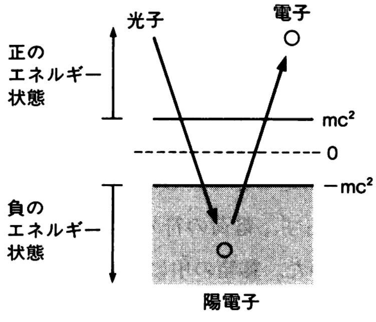


図 5.1　ディラックの空孔仮説。負のエネルギー状態を満たしている電子のうちの 1 個を光子がたたき出して，正エネルギーの電子にする。あとにできた空孔は，正電荷の粒子 (陽電子) として観測される。

るはずだと伝えている。その後もパウリが詳細な計算で，電磁気による効果を取り入れても正電荷の粒子は電子の質量に等しくなることを示した。また，ワイル (H.Weyl) は具体的な計算をしなくても，ディラック方程式がもっている荷電変換 C 対称性を考慮すれば等しいことが示せる，とディラックに伝えている。これだけそうそうたる人々に注意されてもディラックは 1 つのスピノル場で電子と陽子の両方を記述する可能性の魅力を捨て切れなかった。最終的にディラックを翻意させたのは，後に水素爆弾製造計画の機密漏洩事件で悲劇の人となったオッペンハイマー (J.R.Oppenheimer) であった。前に光子が真空から電子をたたき出して，正の電荷をもった粒子をつくる過程について述べたが，彼はこの過程の逆の反応を調べたのである。すなわち正電荷の粒子と電子が消滅して，光子に転化する反応を計算した。ここでディラックは彼の空孔仮説では陽子と電子からできている水素原子はすぐに光子に崩壊してしまうことに気づいたのである。こうしてディラックはハイゼンベルクたちの意見を受け入れて，正の電荷の粒子は電子の反粒子，陽電子であるといい直した。これはアンダーソン (C.D.Anderson) が 1932 年に霧箱による実験で陽電子を発見する前の年のことであった。

ウイルソン (C.T.R.Wilson) の霧箱はある種のガスを過飽和状態になるようにした装置である。ここに荷電粒子が飛込むとガスをイオン化するので，それが核となり荷電粒子の軌道上に液滴が析出して軌跡が見えるようになる。宇宙の彼方からやってくる高エネルギーの陽子である宇宙線が大気に衝突してつくり出す 2 次粒子の中に陽電子があると考えて，霧箱を使ってアンダーソンは実験を始めた。

トムソンの電子の発見のところで紹介したように，磁場をかけておけば比電荷 (単位質量あたりの電荷) が測定できる。しかし，霧箱に写る軌跡は一瞬のことなので左回りか右回りかわからず，電荷の符号が決められない。ここでアンダーソンは巧妙な仕掛けを思いついた。霧箱の中に金属の薄膜を入れておくのである (図 5.2)。すると薄膜を通過した粒子はエネルギーの一部を失っているので軌道半径が小さくなる。だから大きな円から小さい方に進んだと結論できる。こうして電子と同じ質量をもった電荷が正の粒子があることが確立した。

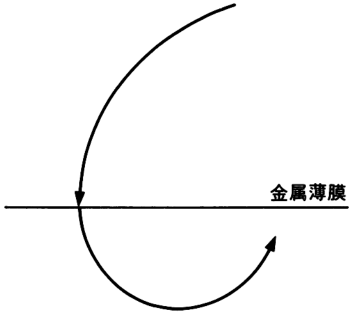


図 5.2 アンダーソンの霧箱の実験。磁場中で荷電粒子は円軌道を描くが，金属薄膜を通過してエネルギーを減少させると，その半径は小さくなる。

5.3 スピノル場の量子論

スピノル場の量子論の話を始めるわけであるが，まずディラック方程式を導くラグランジアン密度を求めなくてはならない。これは簡単で $\mathcal{L} = -\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial^\mu + m)\psi$ である。マイナス符号はエネルギーが正になるよう前もってつけておいた。ψ は複素量であるから，ψ と ψ^* が独立な変数と考えてみよう。また $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^4$ なので，ψ と $\bar{\psi}$ が独立変数と見なそう。そこで $\bar{\psi}$ の変分から得られるオイラー方程式 (3.14) がディラック方程式になることを確かめるのは簡単である。また前の章で議論したように $\bar{\psi}$ と ψ で挟まれた γ_μ は 4 元ベクトルとしてふるまうので，∂^μ と添字が縮約されているものはローレンツ不変量である。また $\bar{\psi}\psi$ も不変なので，$\mathcal{L}$ で記述される理論はローレンツ共変となる。

次に行うべきことは力学変数の正準共役量を求めることであるが，ψ の共役量は

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = -\bar{\psi}\gamma_0 = i\psi^* \tag{5.7}$$

となる。すると ψ^* の正準共役量は $-i\psi$ だからすべての変数の正準共役量が求められたことになるとして，普通は次のステップに進むのであるが，よく考えてみ

ると本当はおかしなことになっている。ψ と $\bar{\psi}$ が独立変数なので，$\bar{\psi}$ の正準共役量を定義に従って計算してみると，ラグランジアン密度には $\bar{\psi}$ の時間微分が含まれていないので，$\bar{\pi} = \partial\mathcal{L}/\dot{\bar{\psi}} = 0$ となる。このことはこのラグランジアン $\mathcal{L}$ で記述される系は ψ と $\bar{\psi}$ と，それらの正準共役量が独立な変数ではなく，少なくとも $\bar{\pi} = 0$ なる拘束条件がある系であることを示している。しかし，拘束条件がある系の量子論のつくり方についてはディラックによりくわしく調べられており，その手続きに従って淡々と議論を進めると，これから述べる簡便法が正当化されることがわかっているので，ここではこの議論に深入りしない。

$\pi = i\psi^*$ として，第3章の議論に従ってハミルトニアン密度 (3.19) と交換関係 (3.24) を計算すれば

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = \psi^*(-i\alpha\cdot\partial + m\beta)\psi = \psi^*\boldsymbol{H}\psi \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
&[\psi_\alpha(\boldsymbol{x}),\, \psi^{*\beta}(\boldsymbol{y})] = \delta_\alpha^\beta\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&[\psi_\alpha(\boldsymbol{x}),\, \psi_\beta(\boldsymbol{y})] = [\psi^{*\alpha}(\boldsymbol{x}),\, \psi^{*\beta}(\boldsymbol{y})] = 0
\end{aligned} \tag{5.9}$$

となる。式 (5.8) の $\boldsymbol{H}$ は式 (5.1) で定義されている。

第3章で量子論の枠組を紹介したときに，所定の運動方程式が量子論として実現している理論をつくるには，まず古典論としてその運動方程式が得られるラグランジアンを求め，正準形式に移ってポアソン括弧 $\{\ ,\ \}$ を量子論の交換子 $[\ ,\ ]/i$ におき換えれば求める理論が得られるといったが，またそれは発見法であって量子論ではそれ以外の方法が禁止されているわけではないともいった。実際にスピノル場では変更が必要になる。ポアソン括弧を $[A,\, B]_\epsilon = AB + \epsilon BA\ (\epsilon = \pm 1)$ の $-i$ 倍でおき換えることを考えてみよう。$\epsilon = -1$ なら従前の量子化になる。$\epsilon = +1$ をプラス型の交換子をよんでいる。式 (5.9) の括弧をこの $[A,\, B]_\epsilon/i$ でおき換えることになる。ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
H &= \int \mathrm{d}^3x\ \mathcal{H}\\
&= \int \mathrm{d}^3x\ \psi H\psi\\
&= \int \mathrm{d}^3x\ \psi^*(\boldsymbol{x})(-i\alpha\cdot\partial + m\beta)\psi(\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{5.10}$$

であり，ψ の時間微分は $i\dot{\psi} = [\psi, H]$ で与えられるから

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha(\boldsymbol{x}) = [\psi_\alpha(\boldsymbol{x}),\ \int d^3y\, \psi^{*\beta}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{H}^\gamma_\beta\psi_\gamma(\boldsymbol{y})] \tag{5.11}$$

$$= \int d^3y \left\{[\psi_\alpha(\boldsymbol{x}),\ \psi^{*\beta}(\boldsymbol{y})]_\epsilon \boldsymbol{H}^\gamma_\beta\psi_\gamma(\boldsymbol{y}) - \epsilon\psi^{*\beta}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{H}^\gamma_\beta[\psi_\alpha(\boldsymbol{x}),\ \psi_\gamma(\boldsymbol{y})]_\epsilon\right\} \tag{5.12}$$

$$= \int d^3y\, \delta^\beta_\alpha\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{H}^\gamma_\beta\psi_\gamma(\boldsymbol{y})$$

$$= \boldsymbol{H}^\gamma_\alpha\psi_\gamma(\boldsymbol{x}) \tag{5.13}$$

となる。ϵ のとり方によらず量子論のレベルでディラック方程式 (5.1) が実現している。ここで式 (5.12) から式 (5.13) への変形で ϵ 型にした交換関係 (5.9) を用いた。プラス，マイナスどちらを使うべきかは，どちらの理論が好ましい内容をもっているかで決まる。次にこれを決める議論に入ろう。

ディラック方程式の一般解 (5.6) の $a_s(\boldsymbol{k})$ や $b^*_s(\boldsymbol{k})$ は積分定数であったが，場の量子論では ψ が演算子なのでこれらが演算子となる。この $a_s(\boldsymbol{k})$ や $b^*_s(\boldsymbol{k})$ とエルミート共役な量でハミルトニアンを書き直してみよう。式 (5.6) の u, v が $\boldsymbol{H}u = \omega u,\ \boldsymbol{H}v = -\omega v$ を満たしていることに留意して，多少の計算をすれば

$$H = \sum_{s=1}^{2}\int d\boldsymbol{k}\ \omega(\boldsymbol{k})\{a^*_s(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}) - b_s(\boldsymbol{k})b^*_s(\boldsymbol{k})\} \tag{5.14}$$

$$= \sum_{s=1}^{2}\int d\boldsymbol{k}\ \omega(\boldsymbol{k})\{a^*_s(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}) + \epsilon b^*_s(\boldsymbol{k})b_s(\boldsymbol{k}) - [b_s(\boldsymbol{k}),\ b^*_s(\boldsymbol{k})]_\epsilon\} \tag{5.15}$$

となる。ここで式 (5.15) の第 3 項は定数なので，初めのラグランジアンにこれを打ち消す項があったとして捨てるのはスカラー場のときと同じである。また，プラス型の交換子を用いても，$a^*_s(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k})$ や $b^*_s(\boldsymbol{k})b_s(\boldsymbol{k})$ は個数演算子になることは第 3 章で議論した。このことより $\epsilon = +1$ でないとエネルギーが正定値にならないことが読みとれる。式 (5.6) で b^* を b としておいても $\epsilon = -1$ のときエネルギーが正定値にならないことは同じである。こうしてスピノル場ではプラス型の交換子を使わなくてはならないことが決まる。以下 $\epsilon = +1$ とする。

次に交換関係 (5.9) を a や b の関係に直しておこう。

$$[a_s(\boldsymbol{k}),\ a^*_t(\boldsymbol{k}')]_+ = \delta_{st}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\quad [b_s(\boldsymbol{k}),\ b^*_t(\boldsymbol{k}')]_+ = \delta_{st}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{5.16}$$

他の交換関係はゼロ

スカラー場の場合と同じでハミルトニアンの最低のエネルギー固有状態は $a_s(\boldsymbol{k})|0\rangle = b_s(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$ で表され，これを真空状態とよぶ。次の式で粒子 m 個，反粒子 n 個の状態を導入して

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{k}_1 s_1 \cdots \boldsymbol{k}_m s_m l_1 t_1 \cdots l_n t_n\rangle \\
&\quad = a^*_{s1}(\boldsymbol{k}_1)\cdots a^*_{sm}(\boldsymbol{k}_m) b^*_{t1}(\boldsymbol{l}_1)\cdots b^*_{tn}(\boldsymbol{l}_n)|0\rangle
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

これのエネルギーを調べてみよう。交換関係 (5.16) と真空状態の定義に留意すれば，簡単な計算で

$$
\begin{aligned}
&H|\boldsymbol{k}_1 s_1 \cdots \boldsymbol{k}_m s_m l_1 t_1 \cdots l_n t_n\rangle \\
&\quad = [\omega(\boldsymbol{k}_1) + \cdots + \omega(\boldsymbol{k}_m) + \omega(\boldsymbol{l}_1) + \cdots + \omega(\boldsymbol{l}_n)] \\
&\qquad \times |\boldsymbol{k}_1 s_1 \cdots \boldsymbol{k}_m s_m l_1 t_1 \cdots \boldsymbol{l}_n t_n\rangle
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

を示すことができる。このエネルギースペクトラムより $a^*_s(\boldsymbol{k})$ $(b^*_s(\boldsymbol{k}))$ は運動量 $\boldsymbol{k}$ の粒子 (反粒子) を生成する演算子であることがわかる。第 2 章の終りの議論と同じで，$a_s(\boldsymbol{k})$ $(b_s(\boldsymbol{k}_1))$ は運動量 $\boldsymbol{k}$ の粒子 (反粒子) 1 個を減らすので，消滅演算子とよばれる。a と b の関係が粒子と反粒子の関係にあることは次の節で詳しく見ることになる。また，s と t の意味についてはここでは立ち入らないが，角運動量を表す演算子をこの a や b たちで表してみるとスピノル場がもっている内部自由度としてのスピンを区別するものであることがわかる。

一般の 2 粒子状態は $\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\, \psi_{s1s2}(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2)|\boldsymbol{k}_1 s_1,\, \boldsymbol{k}_2 s_2\rangle$ と表され，ψ は運動量表示の 2 粒子の波動関数ということになる。$a^*_{s_1}(\boldsymbol{k}_1)$ と $a^*_{s_2}(\boldsymbol{k}_1)$ のプラス型の交換関係がゼロなので，それらは反可換，$a^*_{s_1}(\boldsymbol{k}_1)a^*_{s_2}(\boldsymbol{k}_2) = -a^*_{s_2}(\boldsymbol{k}_2)a^*_{s_1}(\boldsymbol{k}_1)$ である。だから波動関数 $\psi_{s_1s_2}(\boldsymbol{k}_1,\, \boldsymbol{k}_2)$ は $(\boldsymbol{k}_1,\, s_1)$ と $(\boldsymbol{k}_2,\, s_2)$ の入れ換えに対して反対称となる。すなわち ψ で記述される粒子はフェルミ統計に従っている。

5.4 スピノル場と対称性

変分原理では，ラグランジアン密度を 4 次元積分した作用を停留するものとして運動が記述される。だからこの作用を不変にする変換があれば，その変換で運動方程式は共変となると第 3 章で説明した。いまスピノル場の場合の作用は

$$S = -\int \mathrm{d}^4x\ \bar{\psi}(\gamma_\mu \partial^\mu + m)\psi \tag{5.19}$$

であるが，これを不変にする変換を考えてみよう。ローレンツ変換に対して不変なことは前の節で説明した。ここではまず空間反転 P と荷電変換 C について調べてみる。

P は $x_i \to -x_i,\ x_0 \to x_0$ なる変換であるが，スピノル場の変換は

$$\psi(\boldsymbol{x}, x_0) = \epsilon_p \gamma^4 \psi(-\boldsymbol{x}, x_0) \tag{5.20}$$

と定義される。前の章で γ^μ を $\mu = 1,2,3$ に対して符号を変え，$\mu = 0$ は変えない Λ は γ^4 であることを示した。ϵ_p はスピノル場の内部パリティとよばれる自由度である。空間反転は 2 回くり返すと恒等変換になるから ${\epsilon_p}^2 = 1$ である。これを式 (5.19) に代入してみると，空間座標の符号が変ったことにより空間微分の符号も変るので，γ の空間成分の符号の変化と相殺する。また $\bar{\psi}' m \psi' = \bar{\psi} m \psi$ の確認も簡単である。空間座標の符号が逆転している部分は，積分変数を x_i から $-x_i$ にすればよいからたしかに作用 $\boldsymbol{S}$ は変換 (5.20) で不変である。

この空間反転のもとで生成消滅演算子がどのように変換するかを見てみよう。量子力学では物理量は演算子なので変換を受けるのは生成消滅演算子であるから，

$$\begin{aligned}\psi^p = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{s=1}^{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ [a_s^p(\boldsymbol{k}) u_s(\boldsymbol{k}) \exp(ik^\mu x_\mu) \\ + b_s^{*p}(\boldsymbol{k}) v_s(\boldsymbol{k}) \exp(-ik^\mu x_\mu)]\end{aligned} \tag{5.21}$$

であるが，これが $\psi^p = \epsilon_p \gamma^4 \psi(-\boldsymbol{x}, x_0)$ となるようにするには，a^p や b^{*p} をどのように決めたらよいかという問題である。これは $-\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ に戻すために，積分変数 $\boldsymbol{k}$ を $-\boldsymbol{k}$ にすればよいので，

$$\begin{aligned}\psi^p = \epsilon^p \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sum_{s=1}^{2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ \cdot [a_s(-\boldsymbol{k}) \gamma^4 u_s(-\boldsymbol{k}) \exp(ik^\mu x_\mu) \\ + b_s^*(-\boldsymbol{k}) \gamma^4 v_s(-\boldsymbol{k}) \exp(-ik^\mu x_\mu)]\end{aligned} \tag{5.22}$$

となる。u と v の具体的な形 (5.4), (5.5) と γ^4 の形 (5.2)，$\gamma^4 = \beta$ に注意すれば，$\gamma^4 u(-\boldsymbol{k}) = u(\boldsymbol{k}), \gamma^4 v(-\boldsymbol{k}) = -v(\boldsymbol{k})$ であることがすぐにわかる。これを使って式 (5.21) と式 (5.22) を比較すれば

$$a_s^p(\boldsymbol{k}) = \epsilon_p a_s(-\boldsymbol{k}), \qquad b_s^{*p}(\boldsymbol{k}) = -\epsilon_p b_s^*(-\boldsymbol{k}),$$

$$a_s^{*p}(\boldsymbol{k}) = \epsilon_p a_s^*(-\boldsymbol{k}), \qquad b_s^p(\boldsymbol{k}) = -\epsilon_p b_s(-\boldsymbol{k}) \tag{5.23}$$

と前2つの式は読める。後半の2つは前半の式をエルミート共役をとっただけである。空間反転で符号が変らないものを偶奇性(パリティ)がプラス，変るものをマイナスとよぶが，この変換で運動量の向きが変り，粒子と反粒子で偶奇性が反対であることをこれは示している。また ϵ_p の自由度を使えば粒子と反粒子どちらをプラスにしてもよいことがわかるが，ほかの場と相互作用をしているときは，この自由度を使って，相互作用も含め偶奇性が保存するように調整をする。どうしても調整仕切れないときは偶奇性保存が破れているということになる。

次に荷電変換 C は前の章の議論に従えば

$$\psi' = \epsilon_c \psi^c = \epsilon_c C_\gamma \bar{\psi}^{\mathrm{t}}, \qquad \bar{\psi}' = \epsilon_c^* \psi^{\mathrm{t}} {C_\gamma}^{-1} \tag{5.24}$$

である。この式の後半は一般形のまま示すには多少の議論がいるが，γ を式(3.34)にとったとき，$C_\gamma = \gamma^2$ であり，これを使うと簡単に確かめられる。ここで空間反転の場合と同様に場の自由度に起因する因子 ϵ_c をつけておいた。この場合荷電変換を2度くり返すと恒等変換になるという条件は $\epsilon_c^* \epsilon_c = 1$ となる。$\epsilon_c = e^{i\theta}$ として，スピノル場 ψ を $e^{i\theta/2}\psi$ とおき換えると，式(5.24)に ϵ_c は現れなくなるので，以下 $\epsilon_c = 1$ としておく。荷電変換(5.24)を生成消滅演算子の関係に焼き直す際に，v が $(v_1(\boldsymbol{k}), v_2(\boldsymbol{k})) = -V_-(-k)\epsilon_2$ と定義されていたことと，パウリ行列の複素共役 $\bar{\sigma}$ には，${\epsilon_s}^{-1}\bar{\sigma}_i \epsilon_2 = -\sigma_i$ の性質があることに注意すれば，作業は空間反転の場合と基本的に同じで，結果は

$$a_s^c(\boldsymbol{k}) = b_s(\boldsymbol{k}), \quad b_s^{*c}(\boldsymbol{k}) = a_s^{*c}(\boldsymbol{k}), \quad a_s^{*c}(\boldsymbol{k}) = b_s^*(\boldsymbol{k}), \quad b_s^c(\boldsymbol{k}) = a_s(\boldsymbol{k}) \tag{5.25}$$

となり，確に粒子と反粒子の自由度が入れ替っている。マヨラナ場 $\psi^c = \psi$では $a = b, a^* = b^*$ となり粒子と反粒子の区別がなくなる。

荷電変換(5.24)をラグランジアン密度に代入すると

$$-\bar{\psi}'(\gamma_\mu \partial^\mu + m)\psi' = +\psi^{\mathrm{t}} {C_\gamma}^{-1}(\gamma_\mu \partial^\mu + m) C_\gamma \bar{\psi} \tag{5.26}$$

$$= -\bar{\psi} {C_\gamma}^{\mathrm{t}} ({\gamma_\mu}^{\mathrm{t}} \overleftarrow{\partial}^\mu + m)(C_\gamma^{\mathrm{t}})^{-1}\psi$$

$$= -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial^\mu + m)\psi \tag{5.27}$$

となる。式 (5.26) から (5.27) への変形で ψ と $\bar{\psi}$ の入れ換えの際にこれらが反可換であることを使った。また微分記号の上の矢印は左側の $\bar{\psi}$ を微分することを表している。この左微分を部分積分したときに現れる -1 は γ の転置を C_γ を使ってもとに戻すときに現れる -1 と相殺している。これでラグランジアン密度が変換 (5.24) で不変なことがわかった。

またラグランジアン密度は ψ^* と ψ が組となって現れているので，定数の ϵ に対する変換 $\psi' = e^{i\epsilon}\psi$ で不変である。すると第 3 章で議論したようにこの変換に対応するカレントが保存することになる。正しくはカレント密度というべきであるが，略してカレントという風習があるので以下それにならう。ϵ を微小量として $\delta\psi' = i\epsilon(\boldsymbol{x})\psi$ として第 3 章の定義に従ってカレントを求めると

$$J^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\epsilon)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{5.28}$$

となる。このカレントに荷電変換 C をほどこすと式 (5.27) の計算とほぼ同じだが，部分積分がないのでマイナスの符号が残り，$J^{\mu c} = -J^\mu$ となる。これが荷電変換の名の由来である。第ゼロ成分の空間積分で電荷演算子が定義されるが，これを生成消滅演算子で表すと

$$\begin{aligned} Q &= \int \mathrm{d}^3x\ J_0 \\ &= \sum_{s=1}^{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{k}\ [a_s^*(\boldsymbol{k})a_s(\boldsymbol{k}) - b_s^*(\boldsymbol{k})b_s(\boldsymbol{k})] \end{aligned} \tag{5.29}$$

となる。後で示すが電磁カレントはこの J^μ に粒子がもつ電荷 e を掛けたものになっている。たしかに粒子と反粒子では電荷が逆になっている。

最後に弱い相互作用の話で重要になる軸性カレントを定義しよう。これは $\psi' = \exp(i\gamma^5\epsilon)\psi$ なる変換に対応したカレントである。γ^5 は偶数個の γ 行列の積とは可換である。$\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi = \psi^*\gamma^4\gamma_\mu\partial\psi$ で，ψ^* と ψ の間には γ が偶数個あるから，ψ^* から生じる $\exp(-i\gamma^5\epsilon)$ と ψ から生じる $\exp(i\gamma^5\epsilon)$ は打ち消し合って，これは不変である。しかし，質量項 $\bar{\psi}m\psi$ は γ の数が 1 個なので不変にならない。質量がゼロのときにのみ保存するカレントである。$\delta\psi = i\gamma^5\epsilon(\boldsymbol{x})\psi$ としてカレントを計算すると

$$J_5^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\epsilon)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = -i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi \tag{5.30}$$

となる。これの荷電変換は $J_5^{\mu c} = J_5^{\mu}$ である。これは ${C_\gamma}^{-1}\gamma^\mu C_\gamma = -\gamma^{\mu\mathrm{t}}$ であったのに対して，${C_\gamma}^{-1}\gamma^5\gamma^\mu C_\gamma = (\gamma^5\gamma^\mu)^{\mathrm{t}}$ となることによる。空間反転に対しては，カレントの空間成分 J^i はベクトルなので反転するのに対して，γ^5 は擬スカラーで空間反転に対して符号が変る。結果として J_5^i は符号を変えない。このために軸性カレントとよばれる。C と P を同時に行えば，どちらも CP で不変ということになる。

第 6 章

力は相互作用

6.1　電磁気の量子論

素粒子の世界は相対論と量子力学が支配していると前にいったが，この観点から“力”を見直してみよう。太陽と地球の質量を m_{S} と m_{E} とし，距離を r とすると

$$F = G\frac{m_{\mathrm{S}}m_{\mathrm{E}}}{r^2} \qquad (G\ \text{は万有引力定数}) \tag{6.1}$$

の引力が働く，とニュートンの万有引力は述べている。何かの原因で太陽が動いたとすると，その瞬間に距離 r は変化するので，瞬時にその影響が地球に伝わる形式にこの法則はなっている。しかし，相対論では因果関係は光速より速く伝わってはならないので，その影響が地球に届くのは少なくとも太陽から光が届く時間約 8 分 20 秒後である。すなわち，万有引力の式 (6.1) のような記述は相対論の要請と矛盾している。

では“力”を相対論ではどのように考えるかというと，1 点で生じた原因は相対論と矛盾しない運動法則に従う波動となって遠方に伝わり，もう一方がそれを吸収する。この逆も生じる。このようにして運動量を交換し，結果として“力”を及ぼし合ったように見える。場の理論では波動はまた粒子でもある。このことはいい直すと，素粒子は力を媒介する粒子を放出したり，吸収したりする能力をもっており，粒子を交換して“力”を及ぼし合っている，ということになる。この粒子の生成消滅の素過程を相互作用とよんでいる。

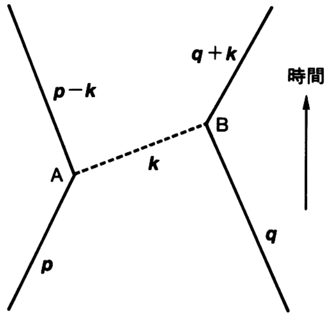


図 6.1　粒子の交換による力の発生。力の媒介子を交換して，運動量のやりとりをする。電荷が源となって光子が，エネルギーが源となって重力子が放出・吸収される。

図 6.1 の場合で，実線が電子を，破線が光子を表しているとすれば，A で運動量 $\boldsymbol{p}$ の電子が消滅し，運動量 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}$ の電子と光子がつくられ，B で運動量 $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{k}$ の電子と光子が消され，$\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}$ の電子がつくられている。A での過程を生成消滅演算子で書いてみよう。電子を消す演算子を a，陽電子の消滅演算子を b としよう。光子は実場で記述されるので粒子反粒子の区別はないから，光子を消す演算子は g とする。つくる演算子はこれらのエルミート共役である。すると，$a^*_{\mathrm{S}}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})g^*(\boldsymbol{k})a_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p})$ と書ける。添字 S，T によって記述されているスピンの自由度がどう処理されているかはまだわからない。この項の $\boldsymbol{p}$ や $\boldsymbol{k}$ について重みをつけて積分したものが電磁相互作用ということになる。このままでは茫漠としてとらえどころがないが，電磁相互作用としてはマクスウェル方程式を知っているのでそれを手がかりにしよう。前の章で電子の保存カレントは $J^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ で与えられた。しかし，これは電子の電荷を 1 としたときのカレントなので，電子の電荷を e とすると実際のカレントは eJ^μ である。以下これを使う。また，マクスウェル方程式は，ベクトルポテンシャル A_μ の方程式として

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + eJ^\mu = 0, \qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{6.2}$$

と表された (式 (1.5))。これを導くラグランジアン密度を求めると

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{\text{int}} \tag{6.3}$$

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad \mathcal{L}_{\text{int}} = eJ^\mu A_\mu \tag{6.4}$$

と書ける。このラグランジアン密度 (6.3) から導かれるオイラー方程式,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \tag{6.5}$$

は, $\partial\mathcal{L}_\gamma/\partial(\partial_\mu A_\nu) = -F^{\mu\nu}$ であり, $\partial\mathcal{L}_{\text{int}}/\partial A_\nu = eJ^\nu$ だから, たしかにマクスウェル方程式 (6.2) が再現している。ここで電子の運動を記述するラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\text{e}} = -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi$ を式 (6.3) に加えれば, 量子論的マクスウェル理論, すなわち量子電磁力学 (QED; Quantum ElectroDynamics) の完成である。

$$\mathcal{L}_{\text{qed}} = \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_{\text{e}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \tag{6.6}$$

$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}\left[\gamma(\partial_\mu - ieA_\mu) + m\right]\psi \tag{6.7}$$

式 (6.7) の形はゲージ理論から自然に導かれることは, 後で紹介する。

量子力学でのハミルトニアンは単位時間での状態の変化を記述しており, $\mathcal{L}_{\text{e}}$や $\mathcal{L}_\gamma$ からつくられるハミルトニアンは, 電子や光子が自由粒子として伝搬してゆくようすを記述するが, 相互作用 $eJ^\mu A_\mu$ はそこからのずれを表している。e が大きければこの効果が大きいことになる。そこで e のことを相互作用定数または結合定数とよんでいる。後で述べる強い相互作用, 弱い相互作用というのも, この結合定数の大小によって命名されている。QED の場合, 計算には $e^2/4\pi$ の組合せで現れ, これを通常 α で表すが, 大きさは $\alpha = 1/137.036$ であり, 摂動計算が許される。

また, $J^\mu A_\mu$ には電子を消し, 再び光子と電子をつくる演算子がたしかに含まれているが, $\bar{\psi} \sim a^* + b$, $\psi \sim a + b^*$, $A \sim g + g^*$ なので, 電子や陽電子, そして光子の生成消滅演算子の組合せは 8 通りあるはずである。これは電子を消す演算子があれば, 陽電子をつくる演算子があると読める。この辺りのルールの図示法があると便利である。図 6.2 の読み方は, 下から上に時間軸があり, 順方向の矢印は粒子 (いまの場合は電子), 逆方向が反粒子を表す。光子のような実場は粒子・反粒子の区別がないので矢印を描かない。粒子 (反粒子) を消せば必ず反粒子 (粒子) をつくる演算子があるので, 矢印をそのままにして上下に折り返してよい, というルールとしてとらえられる (例えば e と f)。

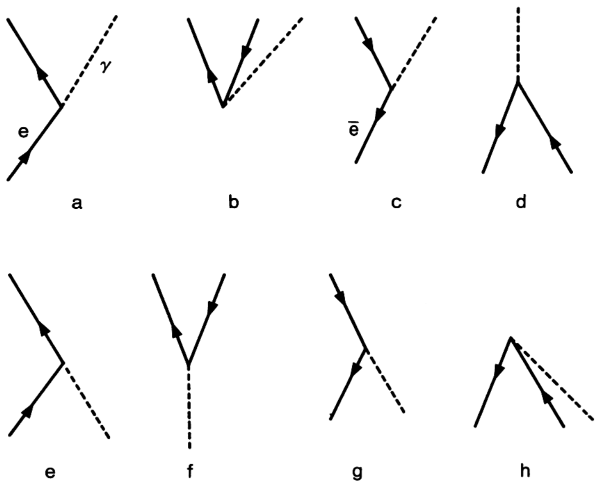


図 6.2　QED で可能な相互作用。e は電子，ē は陽電子，γ は光子を表す。

このルールは一般的な相互作用でも成り立つ。相互作用は生成消滅演算子を適当に掛け合せ，係数をつけて加え合せたものと前に述べたが，あまり勝手なことは許されない。相対論では因果関係が光速より速く伝わることを禁止しているので，x での出来事が原因となった結果は，x から出た光がつくる未来の光円錐の内側でしか生じない。光円錐の外側の点 y は空間的位置関係にあるという。したがって，このような位置関係にある 2 点 x と y の間には因果関係がない。

また，相対論では絶対静止系は無いので空間的位置にある x と y はどちらが未来であるかは決まらない。この事実から空間的位置にある x と y のハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(x)$ と $\mathcal{H}(y)$ は可換でなくてはならない，との量子力学の要請が導かれている。このために生成消滅の演算子は常に組となって，すなわち局所交換関係 (4.4), (5.9) に従う“局所”場 $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\phi}(x)$, $\phi(x)$, $A(x)$, $\cdots$ の形の同時刻の積としてハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(x)$ に現れることになる。時間反転は反応の図の「上下を入れ換え，矢印を反転させる」反応に対応している。

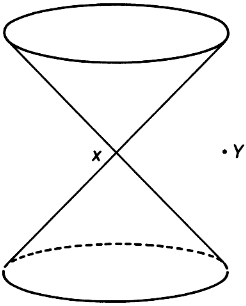


図 6.3 相対論と因果律

QED は場の自由度が無限大であることにともない，計算の随所で発散が現れたが，朝永とシュウィンガー (J.S.Schwinger) により独立に発見されたくり込み理論で発散の現れないたいへん精緻な理論となった。実際に 8 次の摂動計算がされ，8 けたの精度で実験可能なものについては，両者は一致している。くり込み理論は後で触れる。

6.2 重力と弱い相互作用

ニュートンの万有引力の記述 (6.1) は相対論の要請を満たしていないことを前に指摘したが，アインシュタインは相対論の論文を発表するやただちに，相対論と矛盾しない重力理論の研究にとりかかった。これはたいへん困難な作業であった。相対論ではエネルギーと質量は同質のものであった。とするとエネルギーがあればそれは重力の発生源となる。重力を媒介する重力子は自己の運動エネルギーとも相互作用をすることになる。相互作用もエネルギーなのでそれにも結合し，これは無限に続く。何か指導原理がなくては決めようがないが，アインシュタインは等価原理に注目した。等価原理とは慣性の大きさである“慣性”質量と重力の作用する強さを表す“重力”質量がなぜ等しいのかという疑問を表している。クーロン力を見てみればそれは歴然としている。電荷をもっている粒子もない粒子も

あり，ばらばらである。

等価原理があると，重力場中を自由落下している系では無重力となる。これは，重力場で生じた系の加速度によりつくり出された見かけ上の力が重力を打ち消すからである。ここに重力の本質を見いだしたのである。加速度系に現れる見かけの力は見かけではなく重力そのものと見たのである。すなわち重力は座標系によって変化するものととらえた。ある系からみて加速度のある系の座標は前の系の座標との関係でいえば非線形な関係にある。重力が座標系で変化するのであれば，すべての座標系の対等性より，重力を記述する法則は任意の加速度系で同じ形をしているはずであるとして，重力理論を一般座標変換に対して共変な理論として特徴づけた。こうしてアインシュタインの重力理論ができ上がった。この内容はゲージ理論の話の際に紹介する。

次に弱い相互作用の話をしよう。これは，原子核が電子を放出して原子番号の1つ大きい原子核になるベータ崩壊とよばれる現象に顔を出している“力”である。この現象が発見され，研究が進むとおかしなことが見つかった。崩壊前に比べ後ではエネルギーが減少していると報告された。ここでパウリは電気的に中性で観測にかかりにくい未知の粒子が見かけ上失われているエネルギーをもち去っているのだ，との説を唱え，この粒子を中性微子，ニュートリノと名づけた(1931年)。エネルギー欠損を報告した人がなぜこの説を唱えなかったか不思議であるが，量子力学ができミクロの世界では古典力学の基礎概念が根底から崩れさった直後で，当時の物理屋さんは何を信じてよいのかわからなかった，そのような時代であった。電子と中性微子を軽粒子，レプトンと総称する。これは歴史的命名で核子に比べ軽かったからである。今日の知識からすればレプトンの本質は後で述べる強い相互作用をしないことであった。後で紹介するが，今日では陽子より重いレプトン τ が存在する。

このパウリの説を基にフェルミは弱い相互作用の理論をつくる(1934年)。ベータ崩壊では，原子核の中で中性子が陽子と電子，反中性微子に転換している，と

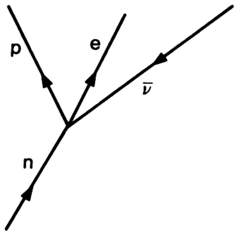


図 6.4　フェルミの理論

した*)。

$$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \bar{\nu} \tag{6.8}$$

ここで中性微子ではなく，その反粒子である反ニュートリノにしたわけは，核子のレプトン数をゼロとし電子と中性微子に1を，反粒子にはそのマイナスを付与すると，このレプトン数が保存するようになるからである。そしてその相互作用ラグランジアン密度を

$$\mathcal{L}_{\mathrm{weak}} = -\frac{G_{\mathrm{W}}}{\sqrt{2}}(\bar{\mathrm{e}}, \nu)(\bar{\mathrm{p}}, \mathrm{n}) + \mathrm{h.c.} \tag{6.9}$$

とした。ここで記号の意味であるが，素粒子を表すのに記号がよく使われる。電子は electron で e，陽子は proton で p，中性子は neutron で n である。陽子と中性子を総称して核子とよぶが，これは N と表す。光子は γ で表記することになっている。また反粒子には粒子の記号の上にバーをつける。これらの粒子の場を表すのにこの粒子を表す記号をそのまま使う。例えば電子の場は，e である。このとき反粒子の記号 $\bar{\mathrm{e}}$ との相性がよい。e は電子を消す演算子を含むのに対して，$\bar{\mathrm{e}}$ は陽電子を消す演算子を含んでいる。$(\bar{\mathrm{e}}, \nu)$ は，場 $\bar{\mathrm{e}}$ と ν の積を表している。スピノルの添字がどう処理されているか不問にしたいのでこう書いた。また，h.c.

*)　原子核内でこの反応が起こったとしたとき，始状態に対して終状態の方のエネルギーが高くなれば，この転換は起こりえない。ベータ崩壊を起こさない原子核はこの理由による。陽子は電荷をもつので，中性子が陽子になるとクーロン・エネルギーが増すのでむやみやたらにベータ崩壊が生じるわけではない。一般的にいって，同位元素のうち中性子過剰の原子核がベータ崩壊を起こす。原子核内に閉じ込められていない自由な中性子はこの反応が許されるので，約 900 秒で崩壊する。

は第1項のエルミート共役で全体がエルミートになるように加えられている。ここに現れた場はすべてスピノル場なのでスピノルの添字をもっているが，これをどう処理すべきか決める原理がフェルミの理論にはなく，たいへん不定性の多い理論といわねばならない。後にパリティ非保存とよばれる現象が発見されて劇的展開を見ることになる。$\mathcal{L}_{\rm weak}$ はたしかに中性子を消し，電子と陽子，反ニュートリノをつくる演算子を含んでいる。

ここでこの相互作用の強さであるが，$G_{\rm W}$ は次元をもった量なので考えている現象のエネルギーの大きさでこの相互作用の強さは変化する。したがって，陽子の質量で無次元化すると，$G_{\rm W}{M_{\rm p}}^2 \simeq 10^{-5}$ であり，電磁相互作用に比べてもたいへん弱いといえる。万有引力定数は $G{M_{\rm p}}^2 \simeq 10^{-39}$ で原子核のレベルの現象では問題にならない。

6.3　強い相互作用

チャドウィックが中性子を発見する (1932 年) や，ただちにハイゼンベルクは原子核構造論の論文をその年に発表している，と前に紹介した。この論文はたいへん優れた論文で中性子を導入して原子核の構造を論じた最初の論文であるにもかかわらず，よくこれだけのポイントを押えたものだと感心させられる。その中にアイソスピンの考えがある。陽子と中間子は電荷をもっているかいないかだけの違いであり，原子核を強く結合させている力の性質に両者の違いは見られない，との事実を説明するために導入された。これを荷電独立性とよぶ。ハイゼンベルクは核子の内部自由度として仮想的な空間，3 次元のアイソ空間があるとし，原子核の世界はこのアイソ空間の空間回転に対して対称であるとした。

スピノルの話のところで，ローレンツ変換を空間回転に限れば，空間回転を表す 3×3 行列を $A^{ab} (\in SO(3))$ として，2 成分スピノル ξ と空間回転 A の関係は 2×2 のユニタリー行列 $g \in SU(2)$ があって

$$\xi^{'} = g\xi, \qquad g^* \sigma^a g = A^{ab} \sigma^b \tag{6.10}$$

となっており，ξ から $\xi^* \sigma^a \xi$ で 3 次元ベクトルがつくられた。この 3 次元の添字については上付き下付きの差がないので区別をしていない。ハイゼンベルクは

核子 p と n が 2 成分でアイソ空間のスピン，すなわちアイソスピンをなしており，理論全体がアイソスピンの回転 $SU(2)$ で不変につくられているとした。変換 (6.10) を微小変換の関係に直してみよう。ここで記号であるが，普通の空間回転のスピンと混同しないために，パウリの行列 σ は アイソスピンの場合には τ で表すことになっているので，ここでもそれに従う。$\theta^a\,(a=1,2,3)$ を微小量として，$g=1+i\theta^a\tau^a/2$ とすると，$g^*g=1$ の条件は θ が実であれば満たしている。$[\tau^a,\,\tau^b]=i\epsilon^{abc}\tau^c$ であることに留意すると

$$
\begin{aligned}
g^*\tau^b g &= \tau^b + i\frac{1}{2}[\tau^b,\tau^a]\,\theta^a = \left(\delta^{bc}+i^2\epsilon^{bac}\theta^a\right)\tau^c \\
&= (1+i\theta^a M^a)^{bc}\tau^c
\end{aligned}
\tag{6.11}
$$

となる。アイソスピン上での微小回転の生成子 $\tau^a/2$ に対応したアイソベクトル上での回転の生成子 M^a の (bc) 成分は $(M^a)^{bc}=-i\epsilon^{abc}$ ということになる。量子力学では微小変換の生成子がその変換に対応した物理量を与える。いまの場合はアイソ空間の角運動量がこれに対応する。アイソスピンとアイソベクトルの場合，アイソ空間回転の生成子の第 3 成分は

$$
\frac{1}{2}\tau^3=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix},\qquad M^3=\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}
\tag{6.12}
$$

となるので，アイソベクトルの (第 3 成分の) アイソ角運動量の固有値は ±1, 0 であり，アイソスピンの場合は $\pm1/2$ である。この固有値の一番大きな値を角運動量の絶対値とよぶことになっているので，ベクトルは 1 でスピンは 1/2 である。この議論は通常の回転にたいしても使えるので，電子の通常のスピンも 1/2 ということになる。

ハイゼンベルクは何ゆえにアイソスピンを考えたのであろうか。荷電独立性は，中性子と陽子の間にも同様に“力”が働くので，陽子と中性子の入れ換えの対称性ぐらいでは説明できない。τ^1 は $SU(2)$ の元であるが，これがちょうど陽子と中性子を入れ換える変換になっている (式 (3.33) 参照)。入れ換え対称性を含む，より大きな対称性 $SU(2)$ が必要であったのである。

ハイゼンベルクはこの強い相互作用の媒介子には言及していない。この論文を書く 3 年前にパウリと共同で，相対論的量子場の理論を完成させている。当然強

い力を相対論的に記述しようとすれば媒介子が必要になることぐらいは知っていた。しかし，量子論の革命の余韻が色濃く残っていた時代で，彼自身が革命の中心人物であった。量子論は 10^{-10} m の世界で確立したばかりであった。そのスケールよりさらに 5 けた小さい世界にできたばかりの場の理論を使って，未知の粒子を予言してよいのか判断に迷ったのであろう。

東洋の片隅にいた湯川はこの意味において幸せであったのかもしれない。1935 年に強い相互作用を媒介する粒子について論文を書いた。この媒介子を湯川は U 粒子と名づけたが，今日ではパイオン (パイ粒子) とよばれている。記号は π である。荷電独立性を保証するためにハイゼンベルクのアイソ空間の考えを使って，このパイオンはアイソベクトルの実スカラー場とした。今日ではパイオンは擬スカラー粒子であることを知っているが，当時は何も知らなかったので少し混乱しているところがある。この事実を取り入れて，今日的な記法で書けば，パイオンは核子場 $\bar{N}$ と N からつくられたアイソベクトルの擬スカラー密度に結合した形

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = if\bar{N}\gamma^5\tau^a N\pi^a, \qquad N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

で核子と相互作用をする。空間反転 P に対して $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ が不変になるためには，P で $\bar{N}\gamma^5 N$ は符合を変えるので，π も符合を変える必要がある。このように素粒子のパリティは相互作用を通じて決められてゆく。いくつかの相互作用で決めたものが相互に矛盾するとき，パリティは非保存であるといわれる。i は全体がエルミートになるようにつけられている。f が相互作用定数である。実験からこれを決めると $f^2/4\pi =$ 約 15 となる。QED の α とは，ベクトル結合と擬スカラー結合でタイプが違うのでただちには比較できないが，大きいことに間違いはない。実質的な大きさの違いは約百倍というところである。これが強い相互作用の名の由来である。上の式をもう少し見やすいように書き換えて見よう。関係式

$$(A^1 + iA^2)(B^1 - iB^2) + (A^1 - iA^2)(B^1 + iB^2) = 2(A^1B^1 + A^2B^2) \tag{6.14}$$

に留意して，$\tau^+ = (\tau^1 + i\tau^2)/2$, $\tau^- = (\tau^1 - i\tau^2)/2$ とし，場は消される粒子の名前でよぶことにしたので $\pi^- = (\pi^1 + i\pi^2)/\sqrt{2}$, $\pi^+ = (\pi^1 - i\pi^2)/\sqrt{2}$ を導入すると (パウリ行列の具体形 (3.33) 参照)，

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = i\sqrt{2}f\left[\bar{p}\gamma_5 n\pi^+ + \bar{n}\gamma_5\bar{p}\pi^- + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{p}\gamma_5 p - \bar{n}\gamma_5 n)\pi^3\right] \tag{6.15}$$

となる。π^+ は定義からわかるように複素場でそのエルミート共役は π^- ということになる。スカラー場の量子論の話を思い出そう。そして式 (6.15) の $\bar{n}\cdots p$ の項は陽子を消し中性子をつくる項を含んでいる。この理論が電荷を保存するとすれば，π^- が正の荷電の粒子を生成し，その反粒子を消す演算子を含むことになる。電荷が 1 のパイオンを π^+ と書けば，場 π^+ が粒子 π^+ を消し，粒子 π^- をつくる演算子を含む場となる。π^3 は中性粒子なので以下では，π^0 と書く。場が運ぶ電荷が決まると電磁場との相互作用は自動的に決まるのだが，その話はゲージ理論を取り上げる章でする。

次に粒子を交換するとなぜ引力が発生するのか説明しよう。基本は第 2.2 節で話した 2 つのレベルの混合である。2 つのレベル E_a と E_b $(E_a < E_b)$ があり，これらのレベルを混合する作用が働くと，E_a はより低く，E_b はより高いレベルになることを示した (図 2.2)。いまの場合，図 (6.5(a)) に従い，陽子と中性子の系 A と，中性子 2 つに正電荷のパイオンの系 B を考えよう。2 つの系のエネルギーは静止質量エネルギーが主要項なので，概略 $M_\text{p} \simeq N_\text{n}$ で，$E_a \simeq M_\text{p} + M_\text{n}$ と $E_b \simeq 2M_\text{n} + \mu_\pi$ であり，$E_a < E_b$ である。ここで M_p, M_n, μ_π たちは陽子，中性子，パイオンの質量である。湯川相互作用により陽子が π^+ を放出して中性子になることは (図 6.5(a))，系 A が系 B になることであり，中性子が π^+ を吸収して陽子になることは，系 B が系 A に変ることである。これで粒子を交換するとエネルギーが下がる，すなわち引力の効果が現れることが理解できたであろう。むしろクーロン力で陽子–陽子に斥力が働くのを説明する方がむずかしい。これは電磁カレント J^μ の 4 次元内積と関係している。$J^\mu J_\mu = -J_0 J^0 + J_i J^i$ でゼロゼロ成分に負の符号が現れることに起因する。

湯川は強い相互作用はクーロン力のように遠隔まで作用を及ぼさず，力の到達範囲は原子核の大きさを越えないことから，パイオンの質量を陽子の約 10 分の 1 とした。パイオンはスカラー場なのでクライン–ゴルドンの方程式を満たしているが，相互作用があると，右辺に源項が現れる。いまの場合は $i\bar{N}\gamma^5\tau^a N$ である。この方程式の静的解を求めてみよう。アイソスピンの自由度を無視し，源項は原点のみに源があるとして $f\delta(x)$ でおき換えよう。時間変動がないので時間微分の

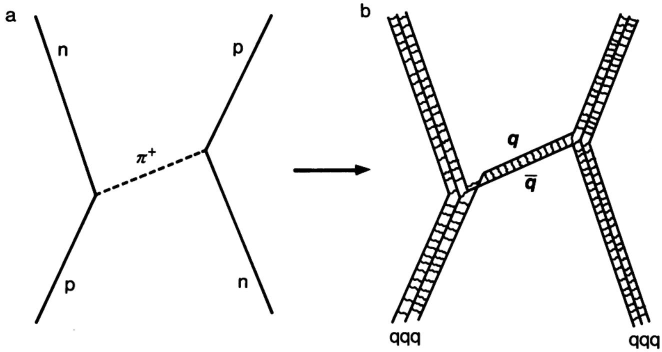


図 6.5　強い相互作用の理解の深化

項はなくなり

$$\left(-\partial^i\partial_i + {\mu_\pi}^2\right)\pi = f\delta(x) \tag{6.16}$$

と読める。これはフーリエ変換の手法を使うとすぐ解けて，

$$\pi(x) = f\frac{\epsilon^{-\mu_\pi r}}{4\pi r}, \qquad \gamma = \sqrt{x^2} \tag{6.17}$$

となる。$\mu_\pi = 0$ ならクーロン・ポテンシャルである。質量がゼロでない粒子が媒介してできるポテンシャルを表しており，湯川ポテンシャルとよばれている。質量が非ゼロのときは，力は媒介子の質量の逆数 ($\hbar$ や c を復元すれば $\hbar/\mu_\pi c$) 程度のレンジしかないことを示している。光子や重力子の質量はゼロでないと逆 2 乗の力が説明できないことがわかるであろう。

湯川は核子もパイオンも素粒子だと考えたが，今日では核子はクォーク 3 つの結合系であり，パイオンはクォークと反クォークの束縛状態であることを知っている。この知見からすれば，強い相互作用はクォーク間で交換されるグルーオン (glue：膠) によって媒介されている，と考えている。パイオンの交換で発生した引力の機構 (図 6.5(a)) をクォークのレベルから理解すると図 6.5(b) となる。クォークとグルーオンの力学は QCD(Quantum ChromoDynamics) とよばれている。これは後で紹介する。

第 7 章

疾風怒濤の時代に

7.1　ドラマの幕開け

湯川の時代 (~ 1935 年) の素粒子論は，それぞれの粒子はどのような役割を果しているのかその役割も明確であり，ある意味ではシンプルな姿でまとまっていたといえるかもしれない。この世の物質の質量を担っている陽子 (p) と中性子 (n)，原子の化学的性質 (原子番号) を決めている陽子，原子を中性化し原子の化学反応の立役者である電子 (e)，電子と組になって弱い相互作用に現れる中性微子 (ニュートリノ，ν)，そして電磁相互作用，強い相互作用，重力を媒介する光子，パイオン (π)，重力子たちの媒介子群が素粒子世界の役者であった (表 7.1)。しかし波乱万丈のドラマの幕開けはすぐにやってきた。

表 7.1　湯川の時代 (~ 1935 年) の素粒子

種族	記号	統計性	核子数	軽粒子数
バリオン	p　n	フェルミオン	1	0
レプトン	e　ν	フェルミオン	0	1
媒介子	$\pi^{\pm,0}$ γ G	ボソン	0	0

湯川がパイオンを予言した 2 年後に，陽電子の発見者であるアンダーソンはネダーマイアー (S.H.Neddermeyer) の協力を得て，宇宙線がつくり出す 2 次生成物の中に質量が陽子の約 10 分の 1 の粒子を発見した。一時は質量が湯川の予想通

りでありパイオンの発見かと考えられたが，これをパイオンとすると矛盾点があることもすぐに明らかとなった。それが強い相互作用をするのなら，大気上空でつくられた粒子は大気の原子核と強く相互作用をして地上までやってこられないはずである，との矛盾である。

この疑問は日本人によって解かれた。谷川安孝は宇宙線によってつくられたパイオンはすぐにほかの粒子に崩壊し，その粒子は強い相互作用をせず，それを地上で観測したと考えた。このとき谷川はパイオンが崩壊してできた粒子もパイオンと同じくボース粒子とした。一方，坂田昌一–井上健 (1942 年) はパイオンの崩壊モードを，例えば負電荷パイオンの場合，$\pi^- \to \mu + \bar{\nu}_\mu$ とした。μ 粒子は質量が電子の 200 倍，陽子の 10 分の 1 であることを除けば電子とまったく同じ性質のフェルミ粒子だとした。そして ν_μ はパウリの導入した中性微子であるが，ベータ崩壊の際に現れる中性微子と違ってよいと，このときすでに指摘している。

電子と中性微子をレプトンと総称するということは前に話したが，強い相互作用をする核子とパイオンはまとめてハドロンとよばれる。陽子と中性子はバリオン属で重い粒子の意味である。これに対してパイオンは中間の質量であったので中間子，メソンとよばれた。ここで導入された μ 粒子もバリオンと電子の中間の質量なので，一時期ミュー中間子とよび，坂田–井上の説はパイ中間子とミュー中間子の理論だとして 2 中間子論とよばれた。これは素粒子について十分な知識のない段階の命名法で，μ 粒子は強い相互作用をしないフェルミ粒子ということでレプトンに分類するのが正しい。そしてバリオンは強い相互作用をするフェルミオンを，メソンは強い相互作用をするボソンをさす。ハドロンはバリオンとメソンのことである。

この坂田–井上の考えが正しかったことは，第 2 次世界大戦が終った直後の 1947 年に，パウエル (C.P.Powell) が原子核乾板*) を用いて π 粒子と μ 粒子両方を違う粒子として確認した。この μ 粒子も最終的には弱い相互作用で $\mu \to \mathrm{e} + \bar{\nu}_\mathrm{e} + \nu_\mu$ と崩壊する。質量の違いを除いて $(\mathrm{e}, \nu_\mathrm{e})$ と (μ, ν_μ) はまったく瓜二つである。この状況を「誰が μ を注文したのだ」と表現した人がいる。これはあとで説明する，クォークが 2 つずつ組になって 3 組現れるのと同根の問題で，いまだに解けずに

*)　乳剤の粒子の細かい高感度感光乳剤を厚く塗り，荷電粒子が通過すると軌跡が感光するようにしたもの。顕微鏡下で観察する。

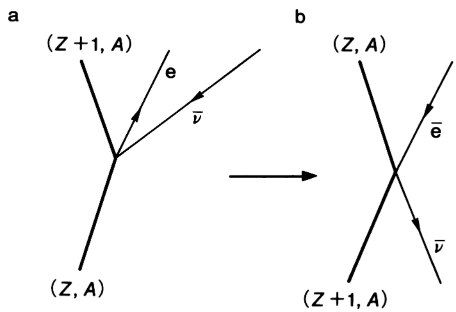


図 7.1　逆ベータ過程。ベータ崩壊の過程の時間の向きを逆にして，電子の線を折り返す。(Z, A) は，原子番号 Z，質量数 A の原子を表す。

なぞとして残されている。

パウリの予言した中性微子は強い相互作用も電磁相互もしないのでたいへん観測がむずかしい粒子である。実際に地球すらも 1 兆回に 1 度くらいしか散乱されずに通り抜ける。ライネス (F.Reine) とコワン (C.L.Cowan) はこのようにわずかしか反応しない中性微子であっても下手な鉄砲の原理で大量の中性微子があれは反応を起こさせることができると考えた。大量の中性微子はどうしたら得られるであろうか。原子核に束縛されていない中性子が多量にある場合，フェルミの理論によればこの中性子は弱い相互作用で崩壊して $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}$ となる。こうしてできた多量の反中性微子をある種の原子核に照射することによりベータ崩壊とは逆向きの反応 (逆ベータ過程) $\bar{\nu}_{\mathrm{e}} + \mathrm{p} \to \mathrm{n} + \bar{\mathrm{e}}$ を起こさせることができると彼らは考えたのである (第 6.1 節の終りを参照)。この反応の確認は原子核から飛び出してくる陽電子を特定すればよい。彼らの計画の当初では多量の中性子ということで原子爆弾の利用までも考えたようであるが，実際には原子炉中の中性子の崩壊から発生する多量の中性微子を用いて実験し，たしかに中性微子が存在することを示した (1953 ～ 56 年)。

ν_{e} と ν_{μ} が違う粒子であることは，ブルックヘブン研究所の加速器を用いてレーダーマン (L.Lederman) たちによって示された。加速された陽子を原子核に衝突させて π^- を発生させる。これはすぐに $\pi^- \to \mu + \bar{\nu}_{\mu}$ と崩壊する。このように

して発生した反中性微子 $\bar{\nu}$ を原子核に照射して逆ベータ過程を起こさせてみるのである。もし $\nu_e = \nu_\mu$ なら，$\bar{\nu}_e + p \to n + \bar{e}$ も $\bar{\nu}_\mu + p \to n + \bar{\mu}$ と同様にあるはずである。しかし実験では $\bar{\mu}$ のみで陽電子は確認できなかったのである。こうして電子と組になった中性微子と，μ 粒子と組になった中性微子は，違う粒子であることが確立した (1962 年)。

7.2　クォーク理論前夜 — 坂田模型

宇宙線を使った原子核乾板の実験で π 粒子をパウエルが見つけた翌年の 1948 年に，サイクロトロンを使って人工的に π 粒子がつくられ，加速器による素粒子実験が本格的に始まる。この結果 π 粒子は擬スカラー粒子であることが判明する。まず π 粒子がスピンをもたないことは詳細平衡 (detailed balance) を使って確立された。これは次の考えに基づく。物理法則が時間反転に対して不変であれば*)，反応 $a \to b$ と反応 $b \to a$ の散乱振幅の大きさが等しくなることが知られている。ここで，反応 $d + \pi^- \to p + p$ と反応 $p + p \to d + \pi^-$ を比べてみるのである。d は陽子と中性子が各 1 個結合した重水素の原子核，デューテロン (deuteron) を表記している。

詳細平衡により両者の反応断面積は等しくなりそうであるが，少々配慮しなくてはならない要因がある。始状態も終状態も反応に関与する状態が 1 つなら問題がないが複数あることを考慮する必要がある。記録をとっている 1 回ごとの反応では，反応に関与できる始状態のうちの 1 つがやってくるのであるから，始状態については平均ということになる。終状態については可能なものはすべて反応に参加してくるので和をとることになる。だから π にスピンがあれば，π が始状態にあるときはスピンの自由度は平均され，終状態にあるときは和になるので両者を比較すればスピン自由度についての情報が得られるのである。

こうして π 粒子はスピンの自由度をもたないことがわかった。次はスカラー粒子か擬スカラー粒子かの判定である。これは $\pi^- + D \to n + n$ の反応を使って確かめられた。本書では量子力学での角運動量の取扱いを説明していないので詳

*)　強い相互作用は不変であることが知られている。

細に示すことはできないが，角運動量とパリティの保存則を用いると，π のパリティがプラス，すなわちスカラー粒子のときは，エネルギー的に反応が許されるぎりぎりの値 (反応の閾値) ではこの反応は禁止反応で，一方擬スカラーのときは許されるチャネルになっていた。実験ではこの反応が起こっていたので π は擬スカラー粒子と決まった (1951 年)。

これは π 粒子を素粒子と考えていた人にとって，なぜスカラーでなく擬スカラー粒子なのか不思議に思ったことであろう。フェルミとヤン (C.N.Yang) の目的は違ったところにあったのだが，この問題に対する回答をその 2 年前の論文 (1949 年) で用意していた。素粒子として π 粒子を導入する強い相互作用の湯川理論が気に入らなかったのであろう，強い相互作用は弱い相互作用のように 1 点で核子どうしが反応し合う 4 体フェルミ型 (核子の場の 4 つの積になっている。図 7.2(a) が自然であると彼らは考えた。そして核力を生じさせる π 粒子は核子と反核子の結合状態だとした (図 7.2(b))。2 粒子系の束縛状態ではエネルギーの最も低い状態は，軌道角運動量部分の値がゼロの s 状態とよばれる状態が自然なので，全体のパリティは核子と反核子のパリティで決まる。

第 5 章で説明したように，ディラック場で表される粒子と反粒子のパリティは

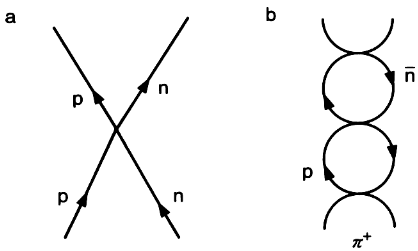


図 7.2　フェルミとヤンの理論。フェルミとヤンは，強い相互作用は核子が 1 点で相互に転換し合う過程であると考えた。核力は，この相互作用により核子と反核子が結合した状態として出現する π 粒子の交換で実現する，とした。

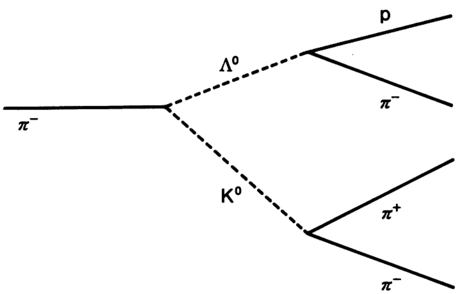


図 7.3　V 粒子の対生成。π^- が原子核中の陽子と衝突して，Λ と K^0 粒子に転化した。原子核は静止していたので，陽子の軌跡には写っていない。Λ も K^0 粒子も中性粒子なので軌跡 (破線) は写っていないが，Λ は陽子と負電荷のパイオンに，K^0 は $\pi^+ + \pi^-$ に崩壊しているので，V 字型に生成されているのが確認できる。

反対であった。全体のパリティはそれぞれのパリティの積なので，この結果結合状態のパリティは負と決まる。このことは同じディラック場で表される粒子と反粒子の結合状態でもいえることなので，クォーク模型でも同じことがいえる。π 粒子の擬スカラー性は，π の複合粒子性の有力な証拠となった。

1950 年代に入ると，前に述べた原子核乾板による宇宙線の実験や，加速器を使った実験が，次々と新粒子を発見していった。これらの新粒子はいつも対になってつくられ，軌跡の格好から V 粒子とよばれた (図 7.3)。この V 粒子はつくられるときは強い相互作用であるが，崩壊するときは弱い相互作用であった。

このようすは $\pi^-\mu$ の場合と似ているが，μ のときと違って V 粒子自身強い相互作用をするにもかかわらず，既知の強い相互作用をする粒子に崩壊するときですら (例えば $\Lambda \to \mathrm{p} + \pi^-$) 弱い相互作用であった。このなぞは西島和彦とゲルマン (M.Gell-Mann) が導入した奇妙さ (strangeness) 数 S によって独立に解かれた。

まず表 7.1 の世界で考えよう。強い相互作用をする粒子であるハドロンの電荷を Q_{H} としよう。考えている状態の核子とパイオンの電荷の総和のことである。次に荷電レプトンの電荷を Q_{L} とする。全電荷は $Q = Q_{\mathrm{H}} + Q_{\mathrm{L}}$ である。これは保存しているが，Q_{H} はどうであろうか。強い相互作用はハドロンどうしで相互作

用をしているので，反応はハドロンだけで閉じていて，Q が保存すれば Q_{H} も保存する。電磁相互作用は光子が作用しても素粒子の種類を変えないので，これも Q_{H} 単独で保存する。しかし，弱い相互作用まで含めると，$\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}$ の反応からもわかるように，この反応の前後で Q_{H} は $+1$ 変化している ($\Delta Q_{\mathrm{L}} = -1$ で，Q は保存している)。このように Q_{H} は弱い相互作用まで含めると非保存となる。また，この世の物質が安定であることからもわかるように，核子数 N (反粒子は負に数えて，陽子と中性子の数) は弱い相互作用まで含めても保存している。こうしてみると強い相互作用と電磁相互作用では 2 つの独立な量が保存していたことになる。

新しく V 粒子が発見された段階で，核子数を拡張し核子の仲間のバリオンにバリオン数 1 を与え (反粒子には -1)，ハドロン全体の電荷 Q_{H} を考えると，バリオン数 N_{B} (拡張された核子数) と Q_{H} は強い相互作用と電磁相互作用のもとで保存するように決めることができた。それだけではなく，新しく保存する奇妙さ，S が定義できた。核子とパイオンの S はゼロであったので，核子とパイオンたちの反応で奇妙さをもった粒子をつくろうとすれば，必ずその奇妙さを中和する逆符号の奇妙さをもった粒子の生成を伴わねばならなかった。これが V 粒子対発生の背景であった。次に，強い相互作用により対でつくられた奇妙さをもつ粒子がお互いに離れてしまえば，強い相互作用や電磁相互作用では非ゼロの奇妙さの状態はゼロの状態にはなれないので安定のままであり，弱い相互作用で奇妙さゼロの状態に遷移するのを待たねばならない。つくられるときは強い相互作用で，崩壊するときは弱い相互作用のなぞはこの機構で説明された。奇妙さが弱い相互作用で非保存なのは基本的には Q_{H} が非保存になるようすと同じである。

表 7.2　バリオン属 ($N_{\mathrm{B}} = 1$) [質量の単位は MeV ($= 10^6$ eV)]

記号	質量	荷電多重項	奇妙さ数
Σ	1290	$\Sigma^+\ \Sigma^0\ \Sigma^-$	-1
N	940	$\mathrm{p}^+\ \mathrm{n}^0$	0
Ξ	1315	$\Xi^0\ \Xi^-$	-2
Λ	1115	Λ	-1

表 7.3　メソン属 ($N_B = 0$) [質量の単位は MeV ($= 10^6$ eV)]

記号	質量	荷電多重項	奇妙さ数
π	140	$\pi^+\ \pi^0\ \pi^-$	0
K	495	$K^+\ K^0$	1
$\bar{K}$	495	$\bar{K}^-\ \bar{K}^0$	−1
(η)	550	η^0	0

ここで当時 ($\sim$ 1955 年) のハドロンの一覧を表 7.2, 7.3 にまとめておいた。陽子や中性子の電荷は自明なので普段は表記しないがここでは荷電多重項を明確にするため明示した。荷電独立性の話の際に，陽子や中性子は同じ粒子のアイソスピンの向きの違いにより荷電の状態が変る，との解釈を紹介した。V 粒子まで含めても，この考えはよく成り立っていた。Σ, π は荷電 3 重項をなし，アイソベクトルであり，N と Ξ, K, $\bar{K}$ は 2 重項でアイソスピノル，Λ と η は 1 重項でアイソスカラーであった。η 粒子に括弧がつけてあるのはこの時点では発見されておらず，後で述べる坂田模型が予言して加速器実験で発見された粒子だからである。坂田模型の大きな成果の 1 つであった。

陽子と中性子の質量は 938.27 MeV と 939.57 MeV で完全に等しいわけではない。これと同じで荷電多重項内でも数 MeV のばらつきがある。表の値はおおよその値である。K 粒子と $\bar{K}$ 粒子は互いに反粒子の関係にある。おもしろいことに K^0 と $\bar{K}^0$ の電荷はゼロであるが，量子数 S が非ゼロなので粒子と反粒子が区別できて，中性パイオンのときのように等しくはない。この表を眺めてみるとバリオン属とメソン属に奇妙さ数を除いて 1 対 1 の対応があるあることに気がつく。実際はクォーク理論が発見されてから気づいたことであるが，奇妙さ数の定義がよくなかったのであった。ハイパーチャージ Y を $Y = S + N_B$ と定義し，S を Y でおき換えてみれば 2 つの表はまったく同じになる (質量の欄を除いて)。

坂田はこれらすべてが素粒子ではなく，核子の p と n に新しい量子数 S を担う粒子 Λ を加え，この 3 粒子が基本となる粒子で，残りはすべてこれらの複合系である，との学説を 1955 年に発表した。この説の話に入る前にフェルミ–ヤンの話に一度戻ろう。ここでは核子と反核子の結合状態として電荷 3 重項の π 粒

子が得られた，と紹介した。核子と反核子の組合せは 2×2 で 4 通りあるはずである。これは次のようになっている。陽子と反中性子の結合状態を $(\mathrm{p\bar{n}})$ と書くことにしよう。これは略記法で実際は真空に陽子を生成させる演算子と反中性子の演算子を作用させたものである。これは陽子や反中性子の座標やスピンの向きにも依存しているはずである。ここではそれらから独立な話をするので無視して書いた。陽子を N^1，中性子を N^2 として，核子と反核子の結合状態は一般には $(\mathrm{N}^\alpha\bar{\mathrm{N}}_\beta)\,(\alpha,\beta=1,2)$ の重ね合せの $f^\beta_\alpha(\mathrm{N}^\alpha\bar{\mathrm{N}}_\beta)$ と書ける。ここでも α,β についてアインシュタインの約束ごとを使う。ここで荷電対称性のことを思い出そう。強い相互作用は $\mathrm{N}'^\alpha = g^\alpha_\beta \mathrm{N}^\beta$ $(g\in SU(2))$ とおき換えても，理論の内容は変らなかった。すると係数 f は $f' = g^* f g$ のように変換する*)(行列表記を用いた)。すると，f が $\mathrm{Tr}\,f=0$ なら，f' もトレースはゼロである。だから

$$(\mathrm{N\bar{N}})^a_{\mathrm{t}} = \tau^{a\beta}_{\ \ \alpha}(\mathrm{N}^\alpha\bar{\mathrm{N}}_\beta), \qquad (\mathrm{N\bar{N}})_{\mathrm{s}} = \delta^\beta_\alpha(\mathrm{N}^\alpha\bar{\mathrm{N}}_\beta) \tag{7.1}$$

を定義すると，アイソ $SU(2)$ 変換 g で荷電 3 重項 (triplet) $(\mathrm{N\bar{N}})^a_{\mathrm{t}}$ と荷電 1 重項 (singlet) $(\mathrm{N\bar{N}})^a_{\mathrm{s}}$ は混じり合うことはない。力学系を不変に保つ変換で移り変るものどうしは同じ質量をもつが，移り変らないものは違ってよい。どうなるかは力学の性質による。この辺りの事情をシンボリックに $2\times\bar{2}=3+1$ と表記する。2 と $\bar{2}$ は核子と反核子の荷電 2 重項を表し，右辺の 3 と 1 は核子–反核子系の 3 重項と 1 重項を指している。3 重項は電荷の決まった基底で表せば (前の章の $\tau^\pm$, τ^3 を思い出して) $\pi^+=(\mathrm{p\bar{n}})$, $\pi^-=(\mathrm{n\bar{p}})$, $\pi^0=(\mathrm{p\bar{p}}-\mathrm{n\bar{n}})/\sqrt{2}$ であり，1 重項が束縛状態であれば $(\mathrm{p\bar{p}}+\mathrm{n\bar{n}})/\sqrt{2}$ である。$(\cdots)$ は量子力学の状態を表しているので位相因子は問題になる。また，$\sqrt{2}$ は状態の長さが 1 になるようつけられている。

坂田の $\mathrm{pn}\Lambda$ を $\mathrm{t}^i\,(i=1,2,3)$ で表そう。坂田はメソン属を $(\mathrm{t\bar{t}})$ の束縛状態とした。シンボリックに書けば $3\times\bar{3}=8+1$ の 8 重項に表 7.3 を割り当てたのである。具体的には

$$\pi = (\mathrm{N\bar{N}})_{\mathrm{t}}, \qquad \mathrm{K}^\alpha = (\mathrm{N}^\alpha\bar{\Lambda}), \qquad \bar{\mathrm{K}}_\alpha = (\Lambda\bar{\mathrm{N}}_\alpha),$$
$$\eta = (\mathrm{p\bar{p}}+\mathrm{n\bar{n}}-2\Lambda\bar{\Lambda})/\sqrt{6}$$

とした。Λ がアイソ 1 重項であるから K と $\bar{\mathrm{K}}$ がアイソ 2 重項で互いに反粒子の

*)　核子をつくる演算子は場 $\bar{\mathrm{N}}$ に含まれる。

関係にあるようすがよくわかる。8+1 の 1 重項も $\eta'(960)$ として後に見つかっている。

坂田のバリオン属の処理はこれほど系統的ではなかった。坂田は Σ の 3 重項と Ξ の 2 重項は t が 2 個と $\bar{\mathrm{t}}$ が 1 個からつくられた。$2-1$ でバリオン数は 1 になっている。具体的には $\Sigma = (\{\mathrm{N}\bar{\mathrm{N}}\}_{\mathrm{t}}\Lambda)$, $\Xi = (\bar{\mathrm{N}}\Lambda\Lambda)$ とした。$\{\cdots\}_{\mathrm{t}}$ は核子と反核子の 3 重項を表している。Λ の奇妙さ数は −1 であるから，これらはたしかに −1 と −2 であり，電荷も (±1, 0) と (0, −1) となっている。しかし現実の Σ と Ξ は N や Λ と親子関係ではなく，兄弟関係にあった。坂田模型のメソン属での成功を継承する形で，バリオン属については兄弟関係を採用してクォーク模型が 10 年ほど後に提唱される。これは後に紹介する。

7.3　パリティ非保存と弱い相互作用

1950 年代初めにもう 1 つなぞがあり，それは τ–θ パズルとよばれた。これは中性の V 粒子で，今日の命名法では中性 K 粒子のことであるが， 2π 崩壊するものと 3π 崩壊するものがあってそれぞれを θ 粒子，τ 粒子とよんだ．それらの質量がまったく等しく，なぜ等しいのか，がパズルであった。θ と τ が同じ粒子であれば問題はないのだが，空間反転に対して弱い相互作用が不変であればパリティは保存するので，2π 崩壊する粒子はパリティがプラス，3π 崩壊する粒子は，π が擬スカラー粒子なので，パリティはマイナスと推定された。だから θ と τ が等しいとは考えられなかった。

この議論から明らかなように，弱い相互作用がパリティ非保存であればパズルはなくなる。リー (T.D.Lee) とヤンがこの考え方で問題を解き (1956 年)，ノーベル賞をとった後に，自分もパリティ非保存は考えていたという人は五万といたが，リー–ヤンの論文の優れていたところは，この問題を解く可能性があると考えられる可能性の限りを分析して，残るのはパリティ非保存の場合のみだと結論を出した。そしてそれを検証するコバルト 60 (^{60}Co) の実験を提唱した点にある。例えば，3π 崩壊はパリティマイナスとしているが，これを導くのに崩壊後の π は軌道角運動量はもっていないとの仮定が使われていた。これを外したとしても崩壊

半減期が長くなりすぎて現実と合わず解決にならない，と結論している。この論文の発表後ただちにウー (C.S.Wu) は実験を行い，弱い相互作用のパリティ非保存の事実を確立した。

^{60}Co は大きなスピンをもつので磁場をかけるとその方向にスピンはそろう。^{60}Co はベータ崩壊で ^{60}Ni に崩壊する。

$$^{60}\mathrm{Co} \to {}^{60}\mathrm{Ni} + \mathrm{e} + \nu_{\mathrm{e}}$$

このとき電子がスピン順方向に飛び出す個数と逆方向に飛び出すものの数を比較するのである。図 7.4(a) で示したように角運動量は擬ベクトルで空間反転に対して方向を変えないが，ベータ崩壊で原子核から飛び出してきた電子の運動量は方向を変える。弱い相互作用が空間反転に対し不変ならば，スピン方向に飛び出す電子の数と反対方向に飛び出す電子の数は等しいはずである。しかしウーの実験ではスピンに逆方向の電子の方が多かったのである。

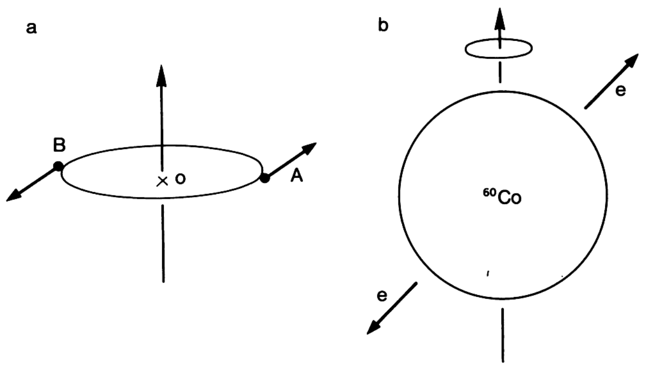


図 7.4　コバルト 60 の実験。空間反転をすると A 点は B 点に移されるが，同時に速度も反転するので回転方向は変わらない。角運動量は擬ベクトルであることが理解できる。スピン順方向に飛び出した電子は，空間反転で逆方向になる。

空間反転とは空間座標 $x_i\,(i=1,2,3)$ を $-x_i$ におき換えることであるが，空間回転に対してはわれわれの世界は対称なので，さらに x_1 のまわりに 180 度回転すれば x_2 と x_3 はもとに戻る。x_1 のみ符号を変えるこの変換は $x_1=0$ 平面内に

置かれた鏡に対する実像と鏡像を結ぶ変換である。パリティ非保存ということは，鏡に対する実像と鏡像の関係にある現象がその関係を保ったまま時間発展しないということをさす。この事実をとらえて神様は左利きといった人がいるが，素粒子論の発展においてはこの鬼面人を驚かせる事実，新奇性において重要であったわけではない。

前に弱い相互作用の 4 体フェルミの理論はたいへん不定性の多い理論だといったが，パリティ非保存発見に引き続く弱い相互作用の実験は，弱い相互作用の構造を浮彫りにしていったのである。その中でもパリティを保存している部分と破っている部分の強さが等しいという事実があった。この事実は最大破れ (maximal violation) とよばれる*)。前に話したディラック場の分解 $\psi = \psi_L + \psi_R$ は空間反転で両者が入れ替るが，狭義ローレンツ群変換では混じり合わないと説明した。この右成分か左成分の片方しか弱い相互作用に関与しなければ，空間反転対称性は破れ，最大破れの事実もうまく説明できた。この事実に立脚してファインマン (R.P.Feynman) とゲルマンはカレント–カレント型理論を提唱した (1957 年)。弱い相互作用の理論はこのカレント–カレント型理論を媒介項としてワインバーグ (S.Weinberg)–サラム (A.Salam) の電弱統一理論に収斂してゆく。この話は別の章で行う。

*)　相互作用ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\rm int}$ が空間反転に対して不変な部分がなく，$\mathcal{H}^{\rm P}_{\rm int} = -\mathcal{H}_{\rm int}$ であったとすると，実験ではパリティの破れは摂動の 1 次では観測されない。パリティの破れは保存する部分と破れの部分の干渉として実験にかかることによる。

第 8 章

ゲージ理論とは（I）

8.1 波動関数とゲージ変換

マクスウェル方程式を 4 元ベクトルポテンシャル A_μ で表すとき，A_μ に不定性があって，これをゲージの自由度とよんだ。A_μ に付加的条件を課してこの自由度を殺すことをゲージの固定という。量子力学が登場するまでは電場や磁場が本来の物理量であり，ゲージの不定性により客観的に決まらない A_μ は物理量ではなく，あくまでも問題を解くための技術的道具にすぎないと考えられていた。古典論のレベルでは見えなかったのであるが，点粒子電子でさえも広がりのある波動関数で記述せねばならない量子論になると，ベクトルポテンシャルを使わないと理論がつくれないことが判明する。この辺りの事情を見事にえぐり出している AB 効果*)を紹介をしよう。

まず時間変動のない電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ と磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 中にある質量 m の荷電粒子の運動を考えよう。電荷 e をもった粒子の座標を $\boldsymbol{x}$ として，この粒子に働くローレンツ力は $\boldsymbol{f} = e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{H}$ ($\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$) で与えられる。ここで電場・磁場はスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を使って，$\boldsymbol{E} = -\partial\phi$, $\boldsymbol{H} = \partial \times \boldsymbol{A}$ と表すことにすれば，荷電粒子の運動方程式は

$$m\ddot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x}) \tag{8.1}$$

$$= eE_i(\boldsymbol{x}) + e\epsilon_{ijk}\dot{x}_j H_k(\boldsymbol{x}) \tag{8.2}$$

*) アハラノフ (Y.Aharonov)–ボーム (D.Bohm) が 1959 年に発見。

$$= -e\partial_i\phi(\boldsymbol{x}) + e[\dot{x}_j\partial_i A_j(\boldsymbol{x}) - \dot{x}_j\partial_j A_i(\boldsymbol{x})] \tag{8.3}$$

となる。この運動方程式を導くラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 - e\phi(\boldsymbol{x}) + e\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}A_i(\boldsymbol{x}) \tag{8.4}$$

である。実際に式 (8.4) からオイラー方程式を計算すれば式 (8.3) が再現する。ここで x_i の正準共役量を求めてみると

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} + eA_i(\boldsymbol{x}) \tag{8.5}$$

となる。これからハミルトニアンを計算すると

$$H = p_i\dot{x}_i - L \tag{8.6}$$

$$= p_i\left[\frac{p_i - eA_i(\boldsymbol{x})}{m}\right] - \frac{m}{2}\left[\frac{p_i - eA_i(\boldsymbol{x})}{m}\right]^2 + e\phi(\boldsymbol{x})$$
$$\quad -e\left[\frac{p_i - eA_i(\boldsymbol{x})}{m}\right]A_i(\boldsymbol{x}) \tag{8.7}$$

$$= \frac{1}{2m}\left[p_i - eA_i(\boldsymbol{x})\right]^2 + e\phi(\boldsymbol{x}) \tag{8.8}$$

となる。次に荷電粒子の波動関数 ψ が満たすべきシュレーディンガー方程式 $i\partial\psi/\partial t = H\psi$ であるが，$p_i \to -i\partial_i$ とすればよいから

$$i[\partial_t + ie\phi(\boldsymbol{x})]\psi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2m}[\partial_i - ieA_i(\boldsymbol{x})]^2\psi(\boldsymbol{x}) \tag{8.9}$$

となる。$e\phi$ の項はこれからの議論に便利なように左辺に移項しておいた。ここでゲージ変換のもとで波動関数の変換性であるが，それは次のようにすればよい。

$$A_i^{'}(\boldsymbol{x}) = A_i(\boldsymbol{x}) + \partial_i\chi(\boldsymbol{x}), \qquad \phi^{'}(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) - \partial_t\chi(\boldsymbol{x}) \tag{8.10}$$

$$\psi^{'}(\boldsymbol{x}) = \exp[ie\chi(\boldsymbol{x})]\psi_i(\boldsymbol{x}) \tag{8.11}$$

実際にこの変換で式 (8.9) が不変に保たれることは，

$$\partial^\mu\{\exp[ie\chi(\boldsymbol{x})]\psi_i(\boldsymbol{x})\} = \exp[ie\chi(\boldsymbol{x})][\partial^\mu + ie\partial^\mu\chi(\boldsymbol{x})]\psi(\boldsymbol{x}) \tag{8.12}$$

の関係に留意すれば，位相因子 $\exp[ie\chi(\boldsymbol{x})]$ を各項の左に寄せることができて両辺をその因子で割ってやればとり除ける。その移項の際にポテンシャルはもとの形に戻っている。

8.2　AB 効果

AB 効果の説明に入る前に，z 軸のまわりの円筒状 (半径 r_0) の無限に延びるコイルに電流 I を流したときの磁場を求めてみよう。以下では円柱座標 (z, r, φ) を使う。z, r, φ 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi$ として，磁場を $\boldsymbol{H} = H_z\boldsymbol{e}_z + H_r\boldsymbol{e}_r + H_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ と表すことにする。この系には z 軸方向への並進対称性と z 軸のまわりの回転対称性があるので，H_z, H_r, H_φ は z と φ に依存しない。単位長さあたりの巻き線数は n とする。巻き線のピッチは無視できるものとしよう。アンペールの法則 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$ を図 8.1(a) の閉曲線 C を境界にもつ曲面で積分しよう。右辺の積分の結果は曲面を貫く電流なので，$\ln I$ である。一方，右辺はストークスの定理により線積分になり $\int_{\mathrm{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{H}$ となる。この積分の上辺と下辺の積分は z 方向の並進対称性と積分方向が逆なことから打ち消し合ってゼロとなる。ゆえに $[H_z(r) - H_z(r_1)]l = \ln I$ $(r < r_0 < r_1)$ がいえる。$H_z(r = \infty)$ はゼロと考えられるので，$H_z(r) = nI$ $(r < r_0)$ である。この議論を $r_0 < r < r_1$ で行えば，$H_z(r) = 0$ $(r_0 < r)$ となる。

次にアンペールの法則を，$z = 0$ を中心とする半径 r の $z = 0$ 平面内の円盤上で積分すると，貫く電流はないので右辺はゼロである。一方ストークスの定理

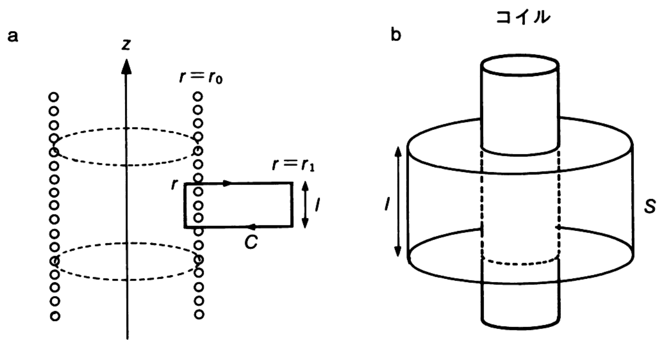


図 8.1　円筒状のコイルと磁場

で線積分になった左辺は $2\pi r \cdot H_\varphi(r)$ となるので，$H_\varphi = 0$ が結論される。最後に H_r を計算しよう。図 8.1(b) の円柱の内部で $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0$ を体積積分しよう。左辺はガウスの定理で円柱の表面積分におき換るが，円柱の上蓋と底蓋の積分は表面方向が逆向きなので打ち消し合ってゼロとなる。一方円柱の側面 S の積分は $2\pi r l H_r$ となるので，$H_r(r) = 0\,(0 \leq r)$ となる。

まとめてみるとコイルに電流が流されているときに磁場のあるところは，コイルの内部の $H_z = nI$ のみで，コイルの外に磁場は漏出していない，ということである。

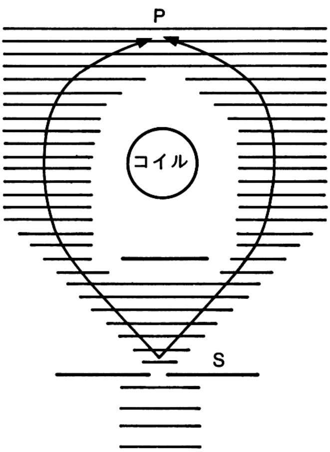


図 8.2　AB 効果の実験

このコイルを使って次のような実験をしよう (図 8.2)。電子ビームを 2 つに分けてこのコイルの左側を通ったものと右側を通ってきたものとを，コイルの背後で干渉させてみるのである。コイルに電流が流れていようといまいと，コイルの外側では磁場はゼロであり，電子は磁場ゼロの領域を通ってくるのであるから，局所性のある理論が電場と磁場のみを使ってつくられるのであれば，干渉パターンは変化しないはずである。しかし量子力学では以下で見るように電流が流れているときといないときでは干渉パターンが変る。これを AB 効果とよぶ。

いま電流が流れていないときの左側 (右側) を通ってきた電子の波動関数を $\psi_{0\mathrm{L}}(\psi_{0\mathrm{R}})$ としよう。これはシュレーディンガー方程式 (8.9) で $A_i = 0$ としたときの解である。次に電流を流しているときを考えよう。電子が通過する領域では磁場 H はゼロであるから，ベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = 0$ を満たしている。これは単連結領域では，$\boldsymbol{A} = \partial\chi$ と書けることを意味する。こう書けるのはあくまでも単連結領域でのみである。コイルの外側は単連結領域ではないので，スリット S と点 P を含む左側のコイル部分を含まない単連結領域での解を χ_{L}，右側の解を χ_{R} としよう。定数項は決まらないので，$\chi_{\mathrm{L}}(\mathrm{S}) = \chi_{\mathrm{R}}(\mathrm{S})$ としておく。ここで左単連結領域での解は $\psi_{\mathrm{L}} = e^{-ie\chi_{\mathrm{L}}}\psi_{0\mathrm{L}}$ と書ける。これが解であることは式 (8.12) を用いたゲージ変換不変性の議論を思い出せば自明である。ゆえに点 P での波動関数は

$$\psi(\mathrm{P}) = \exp[-ie\chi_{\mathrm{R}}(\mathrm{P})][\psi_{0\mathrm{R}}(\mathrm{P}) + \exp\{ie[\chi_{\mathrm{R}}(\mathrm{P}) - \chi_{\mathrm{L}}(\mathrm{P})]\}\psi_{0\mathrm{L}}(\mathrm{P})] \quad (8.13)$$

と書ける。

ここでベクトルポテンシャルを，コイルを 1 回りする経路 C について積分してみる。これは，閉曲線 C を境界にもつ曲面 Σ ($\mathrm{C} = \partial\Sigma$) を考えて，$\int_{\partial\mathrm{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A} = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}$ となるから，コイルに閉じ込められた磁束 Φ に等しい。この閉経路を左経路と右経路に分けて，単連結領域では $\boldsymbol{A} = \partial\chi$ と書けたことを使うと

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{\mathrm{R}} \mathrm{d}s \frac{\mathrm{d}\chi_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}s} - \int_{\mathrm{L}} \mathrm{d}s \frac{\mathrm{d}\chi_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}s} \\ &= [\chi_{\mathrm{R}}(\mathrm{P}) - \chi_{\mathrm{R}}(\mathrm{S})] - [\chi_{\mathrm{L}}(\mathrm{P}) - \chi_{\mathrm{L}}(\mathrm{S})] \\ &= \chi_{\mathrm{R}}(\mathrm{P}) - \chi_{\mathrm{L}}(\mathrm{P}) \end{aligned} \quad (8.14)$$

の関係を得る。この結果を式 (8.13) と組み合せると

$$|\psi(\mathrm{P})|^2 = |\psi_{0\mathrm{R}}(\mathrm{P}) + e^{ie\Phi}\psi_{0\mathrm{L}}(\mathrm{P})|^2 \quad (8.15)$$

となり，点 P での電子密度はコイルに電流が流れているとき ($\Phi \neq 0$) といないとき ($\Phi = 0$) で変化する*)。量子力学では電場と磁場のみでは局所性のある理論はつくれず，ベクトルポテンシャルが必要になることがわかる。ベクトルポテンシャルはゲージの不定性があったが，閉経路上で積分をしたもの (8.14) は磁束で表さ

*) 実験的には 1986 年に外村彰が，電子線ホログラフィーの技術を用いて確立した。

れていることからわかるように，不定性のない物理量であり，これは経路上の電場や磁場のみでは表せない量である。荷電粒子はこれを感じているのである。

8.3　接続の幾何とゲージ理論

荷電粒子の波動関数は，ゲージ変換のもとで $\psi'(\boldsymbol{x}) = e^{ie\chi(\boldsymbol{x})}\psi(\boldsymbol{x})$ と変換された。この式の意味を考えてみよう。この式は，違った点では異なる位相で変換することが許されるのであるから，違った点での位相は比較できないことを意味している。ある点での出来事が原因となって生じる結果は瞬時に遠隔点には及ばないので，運動を記述する法則は 1 点の近傍の物理量の間の関係，すなわち微分方程式で記述できると考えられている。このとき微分操作はそれほど単純な操作でない。実際に場 ϕ を x_μ で微分するという行為は，差

$$\Delta\phi = \phi(x + \mathrm{d}x) - \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) \mathrm{d}x_\mu \tag{8.16}$$

を求める行為であるが，ゲージ変換の自由度を考えると，違った点での場は比較できない。比較するためには点 x_μ の量 $\phi(x_\mu)$ を点 $x_\mu + \mathrm{d}x_\mu$ まで移動したらどうなるかに答える必要がある。すなわち 19 世紀の終りにユークリッド幾何学の平行線公理との関係で深い考察がなされた平行移動の問題がからんでくるのである。

まず，われわれが 2 次元球上に住んでいると考えよう。北極で経度 0 方向を向いているベクトルをこの経線に沿って赤道まで“平行移動”しよう。結果するベクトルは赤道に垂直のはずである。これを赤道に沿って経度 θ まで移動して経線に沿って北極まで戻してみると結果は経度 θ を向いたベクトルになっている (図 8.3)。閉じた経路に沿って平行移動した結果はもとのベクトルと違っている。また経路が違えば結果も違う。これは 2 次元球面に曲率があるからであるが，われわれの住んでいる空間に曲率があれば同じことになる。後でみるように，あらゆる閉経路に沿って平行移動した結果が同じなら，その空間は曲率がないことが示せる。違いが出れば曲率があることになる。平行移動した結果はその点での空間の構造がどのようになっているかに依存するのである。この点を考慮して微分の問題を考えてみよう。

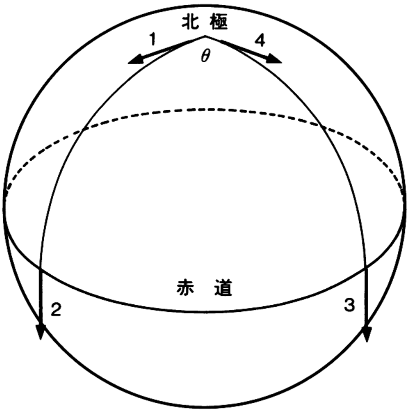


図 8.3　曲率のある空間での平行移動

電磁相互作用において荷電粒子の波動関数は複素 1 次元の場であったが，平行移動のようすが明確になるよう，核子のアイソスピンのように内部自由度のある場 $\phi_a(x)\,(a=1,\cdots,N)$ を考えよう。これを $x+\mathrm{d}x$ まで移動したとする。結果を $\phi_a(x)+\delta\phi_a(x)$ と書こう。ここで $\mathrm{d}x$ が十分に小さければ，$\delta\phi$ は $\mathrm{d}x$ の 1 次としてよいであろう。また ϕ を平行移動したのであるから，結果の $\phi+\delta\phi$ も ϕ に線形であると仮定する。すると，線形結合の "係数" ${B^{\mu}}^b_a(x)$ があって $\delta\phi(x)_a = i{B^{\mu}}^b_a(x)\phi_b(x)\mathrm{d}x_\mu$ と書けるから

$$\phi_a(x)+\delta\phi_a = \left[\delta^b_a + i{B^{\mu}}^b_a(x)\mathrm{d}x_\mu\right]\phi_b(x) \tag{8.17}$$

である。ここで虚数単位 i は B^μ がエルミートになるよう前もってくくり出しておいた。この B^μ は平行移動のようすを決めているので，この量がいま考えている内部自由度の空間が各点でどのように曲がって時空の上に乗っているかを表す量になっている。これを数学では接続の係数 (connection) とよび，物理ではゲージ場とよんでいる。

アイソスピンは任意の点の場 $\phi_a(x)$ を空間の点に依存しない $g\in SU(2)$ で変換したが，ここでは各点独立に変換させることにする。いま，N 成分の場を考え

ているので，変換群は $SU(N)$ としよう。

$$\phi'_a(x) = u(x)^b_a \phi_b(x), \qquad u(x) \in SU(N) \tag{8.18}$$

このときの B の変換性を考えよう。$\phi(x) + \delta\phi(x)$ は $\phi(x)$ を点 $x + \mathrm{d}x$ まで移動したのであるから，点 $x + \mathrm{d}x$ の量として変換するはずである。

$$\begin{aligned}\phi'_a(x) + \delta\phi'_a(x) &= u^b_a(x + \mathrm{d}x)[\phi_b(x) + \delta\phi_b(x)]\\ &= \left[u^b_a(x) + \partial^\mu u^b_a(x)\mathrm{d}x_\mu\right][\phi_b(x) + \delta\phi_b(x)]\\ &= u^b_a(x)\phi_b(x) + \partial^\mu u^b_a(x)\phi_b(x)\mathrm{d}x_\mu + u^b_a(x)\delta\phi_b(x)\end{aligned} \tag{8.19}$$

一方 $\delta\phi_a(x)$ は点 x の場で書けているが，B の変換性はわからないので B' とすると

$$\delta\phi'_a(x) = iB'^{\mu b}{}_a u^c_b(x)\phi_c(x)\mathrm{d}x_\mu \tag{8.20}$$

となる。$\mathrm{d}x$ について 1 次の精度の議論であるから，式 (8.18) と式 (8.19) を $\mathrm{d}x$ の 1 次まで比較する。以下行列表記法を使うことにして，次の式を得る。

$$B'^\mu = u(x)B^\mu u^{-1}(x) - i(\partial^\mu u)u^{-1} \tag{8.21}$$

これがゲージ場の変換性である。微分は $\phi(x + \mathrm{d}x)$ と $\phi(x) + \delta\phi(x)$ の比較から決めるべきであるから

$$\begin{aligned}&\Delta\phi(x) = \phi(x + \mathrm{d}x) - [\phi(x) + \delta\phi(x)] = \mathcal{D}_\mu\phi(x)\mathrm{d}x_\mu \qquad (8.22)\\ &\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu \mathbf{1} - iB^\mu\end{aligned}$$

となり，この式から $\mathcal{D}^\mu\phi(x)$ を共変微分とよんでいる。$\Delta\phi(x)$ は点 $x + \mathrm{d}x$ の量であるから，変換は $u(x + \mathrm{d}x)\Delta\phi$ となり，

$$[\mathcal{D}^\mu\phi(x)]' = u(x)\mathcal{D}^\mu\phi(x) \tag{8.23}$$

が名の由来である。これは変換性 (8.18) と (8.21) から直接確かめることもできる。すべての微分をこの共変微分でおき換えた理論がゲージ理論である。

次に，違う 2 つの経路 $(x \to x{+}\mathrm{d}x \to x{+}\mathrm{d}x{+}\mathrm{y})$ と $(x \to x{+}\mathrm{d}y \to x{+}\mathrm{d}x{+}\mathrm{d}y)$ の移動の差を求めよう。これは式 (8.17) 留意すると

$$\Delta\phi(x) \;=\; \{[1 + iB^\nu(x + \mathrm{d}x)\mathrm{d}y_\nu] \cdot [1 + iB^\mu(x)\mathrm{d}x_\mu]$$

$$-[1+iB^\mu(x+\mathrm{d}y)\mathrm{d}x_\mu]\cdot[1+iB^\nu(x)\mathrm{d}y_\nu]\}\,\phi(x)$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} iF^{\mu\nu}(x)\phi(x)\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}y_\nu \tag{8.24}$$

$$F^{\mu\nu}(x)=\partial^\mu B^\nu(x)-\partial^\nu B_\mu(x)-i[B^\mu(x),\,B^\nu(x)] \tag{8.25}$$

となる。この反対称共変テンソル $F^{\mu\nu}$ は曲率テンソルとよばれている。変換性は $\Delta\phi'=u(x+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)\phi(x)$ より

$$F'^{\mu\nu}=u(x)F^{\mu\nu}u^{-1}(x) \tag{8.26}$$

と読める。これも変換式 (8.21) から直接確かめることもできる。

電磁気学の場合は $\psi'(x)=e^{ie\chi(x)}\psi(x)$ であったので，変換群として $U(1)$ を選んだことに対応するが，これを上記の議論に当てはめてみると，B^μ も 1×1 行列になるから，$e^{-ie\chi(x)}\cdot\partial^\mu e^{ie\chi(x)}=ie\partial^\mu\chi(x)$ より，変換式 (8.21) は電磁気の場合のそれに一致する。また，式 (8.25) も $\partial^\mu B^\nu-\partial^\nu B^\mu$ となり，電磁気のときの $F^{\mu\nu}$ テンソルと一致する ($B^\mu\to eA^\mu$ として)。4 元ベクトルポテンシャルは接続の係数としての幾何学的意味をもっていたのである。

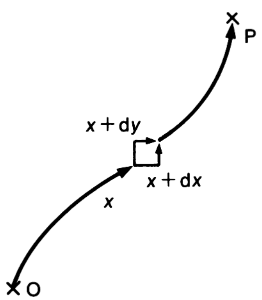


図 8.4　$F^{\mu\nu}=0$ の意味

次に $F^{\mu\nu}$ は微分幾何学のリーマン (G.F.B.Riemann) の曲率テンソルとよばれているものに対応する量であるが、実際に $F^{\mu\nu}=0$ としてその意味を調べてみると，実感として曲率を表していることが感じとれるであろう。ここで $F^{\mu\nu}=0$ とする。点 O と点 P を結ぶ経路を考える。そして，次の経路 C に沿った方程式を調べてみよう。$u(\mathrm{O})=1$ としておく。

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=iB^{\mu}(x(s))\frac{\mathrm{d}x_{\mu}}{\mathrm{d}s}u \tag{8.27}$$

ここで s は点 O から経路上の点 x_μ までの距離である。これの解は次のようにして求められる。経路の長さを l として，それを L 等分して，$\Delta s=l/L$ とする。$x_\mu^k=x_\mu(k\Delta s)$, $u_k=u(x_\mu^k)$, $B_k^\mu=B^\mu(x_\mu^k)$, $\Delta x_\mu^k=x_\mu^{k+1}-x_\mu^k$ を導入して，u^k までわかっているとして，

$$u^{k+1}=(1+iB_k^{\mu}\Delta x_{\mu}^k)u^k, \qquad u^0=1 \tag{8.28}$$

を定義する。こうして $u(\mathrm{P})$ を決めると，一般の場合，経路 C に依存する。しかし，$F^{\mu\nu}=0$ の場合は経路に依存しない。それは図 8.4 のように，微小領域で経路の違うものを比較してみるのである。すると変形した経路からの寄与の差は式 (8.24) で評価できるので，$F^{\mu\nu}=0$ ならその差は $O(L^{-3})$ である。有限連続変形にはこの操作が $O(L^2)$ 回必要であるから，その変形による差は $O(L^{-1})$ であり，$L\to\infty$ でゼロになる。こうして求めた u は経路によらず，点 P の座標 x_μ のみの関数 $u(x_\mu)$ となる。次に $\partial^\mu u(x)$ を計算してみよう。u は経路によらないのであるから，任意方向の $\mathrm{d}x_\mu$ に対して

$$u(x)=(1+iB^{\mu}\mathrm{d}x_{\mu})u(x-\mathrm{d}x) \tag{8.29}$$

としてよい。これは $B^\mu=-i\partial^\mu u\cdot u^{-1}$ と書けることを意味する*)。ならばこの B^μ を u^{-1} でゲージ変換して見よう。式 (8.21) の u を u^{-1} でおき換えて

$$\begin{aligned}B'^{\mu}&=u^{-1}B^{\mu}u-i(\partial^{\mu}u^{-1})u\\&=u^{-1}(-i\partial^{\mu}u\cdot u^{-1})u-i(\partial^{\mu}u^{-1})u\\&=-i\partial^{\mu}(u^{-1}u)=0\end{aligned} \tag{8.30}$$

を得る。$F^{\mu\nu}=0$ ならいつも適当なゲージ変換を行えば，接続の係数はゼロとできる。言い換えると，平行移動は trivial になっているのである。だから，$F^{\mu\nu}=0$ のときを平坦接続とよんでいる。

次にスカラー場やディラック場の理論をゲージ理論化してみよう。微分を共変微分におき換えるだけでよいから，ラグランジアン密度は

---

*)　rot $\boldsymbol{H}=0$ なら $\boldsymbol{H}=\partial\chi$ と表せる事実は，この命題に含まれている。実際に $u=\exp(ie\chi)$ とすればよい。また単連結領域にしか適用できないことも，この証明から理解できる。

$$\mathcal{L}_{\rm KG} = -[|(\partial^\mu - iB^\mu)\phi|^2 + m^2\phi^*\phi] \tag{8.31}$$

$$\mathcal{L}_{\rm Dirac} = -\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial^\mu - iB^\mu) + M]\psi \tag{8.32}$$

で与えられる**)。これらがゲージ不変であることは，共変微分の性質 (8.23) とユニタリー行列の性質 $u^*u = 1$ に注意すれば明らかである。この形より，スカラー場やディラック場とゲージ場の相互作用があいまいさなく決まっているようすがわかる。また，$U(1)$ ゲージ理論とすれば QED 理論が再現している。ゲージ場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L}_{\rm gauge} = -\frac{1}{4g^2}{\rm Tr}\,(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \tag{8.33}$$

である。電磁場との対応 $eA^\mu \to B^\mu$ で電荷，すなわち相互作用定数 e を g と変えたことと，$F^{\mu\nu}$ は行列なのでトレースをとっている。これも変換式 (8.26) よりゲージ変換不変であることが読みとれる。このほかに，微分のない項でディラック場やスカラー場からゲージ不変な組合せがあればそれを加えてよい。$\mathcal{L}_{\rm gauge}$ は B^μ が対角行列でない限りの 4 次まで含んでおり，ゲージ場が自己相互作用していることがわかる。そして，**ゲージ場の質量項 (微分のない B^μ の 2 次の項) がゲージ不変な形でつくれない**。これは B^μ の変換性 (8.21) は B^μ の次数を変えていることに注意すれば示すことができる。

8.4 実空間での接続と重力理論

曲率のある空間のベクトル a^μ の接続を考えよう。まず座標を x^μ とする。近接する 2 点間の距離は，計量テンソル $g^{\mu\nu}$ があって ${\rm d}s^2 = g^{\mu\nu}{\rm d}x_\mu {\rm d}x_\nu$ と表されているとする。ここで座標変換 $x'_\mu = x'_\mu(x)$ を行ってみる。$g^{\mu\nu}$ の変換性は

$$\begin{aligned}{\rm d}s^2 &= g^{\mu\nu}{\rm d}x_\mu {\rm d}x_\nu \\ &= g^{\mu\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\tau}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\rho}{\rm d}x'_\tau {\rm d}x'_\rho \\ &= g'^{\tau\rho}{\rm d}x'_\tau {\rm d}x'_\rho \end{aligned} \tag{8.34}$$

**) 1954 年にヤンとミルズ (R.L.Mills) により発見された。

で決まる。これを参考にすればベクトル a^μ の変換性は $a'^\mu = a^\tau(\partial x_\tau/\partial x'_\mu)$ と決まる。また，$a^\mu a_\mu$ の変換不変性と鎖則 $(\partial x_\mu/\partial x'_\tau)\cdot(\partial x'_\tau/\partial x_\nu) = \delta^\nu_\mu$ から $a'_\mu = (\partial x'_\mu/\partial x^\tau)a_\tau$ となる。

ここで点 x_μ のベクトル a_μ を点 $x_\mu + \mathrm{d}x_\mu$ まで平行移動したとしよう。これは前節と同様に $a + \delta a$ となったとする。ここでも δa の a と $\mathrm{d}x$ に対する線形性を仮定して，$\delta a_\mu = \Gamma^{\nu\tau}_\mu \mathrm{d}x_\nu a_\tau$ と表そう。Γ が接続の係数である。前節の $B^{\mu b}_{\ a}$ の添字 a, b は内部空間の自由度を表していたが，いまの場合は実空間の自由度に関係している。ゲージ場の場合と同様に，$a + \delta a$ が点 $x + \mathrm{d}x$ のベクトルの変換性を示すことから，接続の係数の変換性は求められて

$$\Gamma'^{\mu\tau}_{\ \nu} = \frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\tau}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\lambda}\Gamma^{\rho\kappa}_\lambda + \frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu}\frac{\partial^2 x'_\nu}{\partial x_\rho \partial x_\kappa}\frac{\partial x_\kappa}{\partial x'_\tau} \tag{8.35}$$

となる。ゲージ場との対応は $u^b_a \to \partial x'_\mu/\partial x_\nu$ であり，違いは B^μ の μ は変換を受けなかったが，ここではベクトルとして変換を受けている点である。これを理解すれば，両者は本質的に同じものである。

式 (8.35) を見ると，はじめに Γ が上付き添字に対して対称であれば，変換後もそれは保たれることがわかるので，ここでは対称な接続に限ることにする。さらに，平行移動によりベクトルの長さは変らないものとする。

$$g^{\mu\nu}(x + \mathrm{d}x)(\delta^\rho_\mu + \Gamma^{\tau\rho}_\mu \mathrm{d}x_\tau)\cdot a_\rho(\delta^\lambda_\nu + \Gamma^{\kappa\lambda}_\nu \mathrm{d}x_\kappa)a_\lambda = g^{\mu\nu}(x)a_\mu a_\nu \tag{8.36}$$

この式と a_μ が任意に選べることより

$$\partial^\sigma g^{\rho\lambda} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma\rho}_\mu + g^{\rho\mu}\Gamma^{\sigma\lambda}_\mu = 0 \tag{8.37}$$

の式が導かれる。この式で σ, ρ, λ を循環置換させて得られる 3 つの式から，仮定 $\Gamma^{\nu\lambda}_\mu = \Gamma^{\lambda\nu}_\mu$ を使えば Γ について解くことができて

$$\Gamma^{\rho\lambda}_\mu = \frac{1}{2}g_{\mu\sigma}(\partial^\sigma g^{\rho\lambda} - \partial^\rho g^{\lambda\sigma} - \partial^\lambda g^{\sigma\rho}) \tag{8.38}$$

と求められる。ここで $g_{\mu\nu}$ は $g^{\mu\nu}$ の逆行列 $(g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta^\nu_\mu)$ である。

ここでゲージ場の場合と同様に $\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}y$ からできる四辺形の 2 つの経路を考えて，それらに沿ったベクトル a の平行移動の差を Δa とすると，これは a, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ に線形であるから，$R^{\nu\rho\lambda}_\mu$ があって

$$\Delta a_\mu = R_\mu^{\nu\rho\lambda} \mathrm{d}x_\rho \mathrm{d}y_\lambda a_\nu \tag{8.39}$$

と書ける。この $R_\mu^{\nu\rho\lambda}$ もゲージ場の場合と同様の議論により，接続の係数で

$$R_\mu^{\nu\rho\lambda} = \partial^\rho \Gamma_\mu^{\lambda\nu} - \partial^\lambda \Gamma_\mu^{\rho\nu} - \Gamma_\mu^{\rho\kappa}\Gamma_\kappa^{\lambda\nu} + \Gamma_\mu^{\lambda\kappa}\Gamma_\kappa^{\rho\nu} \tag{8.40}$$

と表される。これはリーマンの曲率テンソルとよばれる量であり，これがゼロであれば接続の係数をゼロとする座標が選べることも，ゲージの場合と同じである*)。また $R^{\mu\nu} = R_\alpha^{\mu\nu\alpha}$ と 2 階テンソルを定義したものはリッチ (C.G.Ricci) テンソルとよばれている。これからスカラー曲率 $R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ が定義される。これはつくり方からわかるように座標変換に対して不変な量になっており，2 階微分を含んでいるので，一般座標変換に対して不変なラグランジアン密度として採用できる。

ここで少し注意がいる。変分原理を使うとき，ラグランジアン密度を 4 次元積分したものを考えることになるが，体積要素 d^4x は座標変換に対して，$\mathrm{d}^4x \to \mathrm{d}^4x \det(\partial x'/\partial x)$ となる。ここに現れるヤコビアン (C.G.Jacobi) を打ち消す因子をつけておく必要がある。これは $g^{\mu\nu}$ の変換性 (8.34) より

$$\det(g'^{\mu\nu}) = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 \det(g^{\mu\nu}) \tag{8.41}$$

となり，$g \overset{\mathrm{def}}{=} \det(g^{\mu\nu})$ を導入すれば，$\sqrt{-g'} = \det(\partial x/\partial x')\sqrt{-g}$ となるので，$\mathrm{d}x^4\sqrt{-g}$ は座標変換に対して不変になる。また，平坦メトリック η からもわかるように $\det(g)$ は負であるので，平方根をとるときにマイナスがつけてある。不変作用は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Gr}} = \frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, R \tag{8.42}$$

とすればよい。これがアインシュタインの重力理論を記述する作用である。この理論から万有引力を求めてみるとちょうど G がニュートン定数になっている。アインシュタイン重力理論のゲージ理論としての理解は内山龍雄によって示された (1956 年)。ゲージ理論では接続の係数，すなわちゲージ場が力学変数であったが，アインシュタイン重力ではより具体的な知識，メトリック $g^{\mu\nu}$ をもっているので，接続の係数は式 (8.38) のように $g^{\mu\nu}$ で表された。重力現象は $g^{\mu\nu}$ が変動するこ

*) 証明法も基本的に同じである。

と，すなわち空間が変形する現象である。しかし，G がたいへん小さいので**)地球上の現象ぐらいでは時空の歪みはたいへん小さく，観測にかかるほどの量にはならない。

**)　M_{p} を陽子の質量として $GM_{\mathrm{p}}{}^2 \simeq 10^{-39}$。

第 9 章

弱い相互作用理論の展開

9.1 カレント再論

第 3 章で微小変換があればそれに対応するカレントが定義できること，そして第 5 章でスピノル場の場合にベクトルカレントと軸性カレントを紹介した。第 3 章の話をおさらいしておこう。場 ϕ_a に微小変換 $\delta\phi_a = \epsilon F_a(\phi)$ が定義されているとき，カレントは次のように定義 (3.15) された。

$$J^\mu = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \epsilon} \tag{9.1}$$

ここで $\partial\mathcal{L}/\partial\partial_0\epsilon = (\partial\mathcal{L}/\partial\partial_0\phi_a)F_a(\phi)$ と，$\partial\mathcal{L}/\partial\partial_0\phi_a$ が ϕ_a の正準共役量 π_a であることを思い出すと，

$$Q = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ J_0 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{x}\ F_a(\phi)\pi^a$$

と書けるので，$[iQ, \phi_a] = F_a$ となり，Q は微小変換 $\delta\phi_a = \epsilon F_a(\phi)$ を引き起こす生成子という意味をもっている。

ここで弱い相互作用の理論の展開を紹介するにあたって，変換群とカレントの関係をもう少しくわしく説明しよう。弱い相互作用の話を念頭においているのでスピノル場のつくるカレントを中心に調べよう。

まず N 個のスピノル場 $\psi = a\,(a = 1, 2, \cdots, N)$ を考えよう。これらのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\sum_{a=1}^{N} \bar{\psi}_a(\gamma^\mu\partial_\mu + m_a)\psi_a + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\bar{\psi},\, \psi,\, \cdots) \tag{9.2}$$

で与えられる。ここで m_a は ψ_a で表される粒子の質量であり，$\mathcal{L}_{\rm int}$ は存在していればそれらの相互作用を表している。$\cdots$ は，場 ψ が自分自身以外の場と相互作用をしている可能性を表した。くり込み可能な理論ではスピノル場の相互作用には場の微分は含まれないので，ここでも $\mathcal{L}_{\rm int}$ は場の微分を含んでいないものとする。

いま，ここで変換群として $N\times N$ ユニタリー行列のつくる群 $U(N)$ を考えよう。これの微小変換は $u=1+i\epsilon_\alpha\lambda^\alpha$ で与えられる。ϵ_α は N^2 個の微小量を表すパラメータである。α は 0 から N^2-1 まで走る添字で，ここでもアインシュタインの約束ごと (規約) が使われている。$N\times N$ 行列は N^2 次元のベクトル空間と見ることができるが，λ^α はそれの基底である。そしてこれらはエルミート行列にとることができて，規格化条件として

$$\mathrm{Tr}\,\lambda^\alpha\lambda^\beta=\delta^{\alpha\beta} \tag{9.3}$$

を課しておく。$U(2)$ の場合，これに対応するのは，アイソスピン行列 τ^i と単位行列 $\mathbf{1}_2$ であるが，規格化条件がこの場合 $2\delta^{\alpha\beta}$ になっている。これは歴史的経緯によるもので，パウリがパウリ行列 σ_3 の固有値を ±1 にしたかったためにこうなった。この歴史を引きずって，$U(3)$ の場合も規格化は $2\delta^{\alpha\beta}$ にとられるのが習わしである。具体的には，

$$\begin{gathered}
\lambda^0=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\quad \lambda^1=\begin{pmatrix}&1&\\1&&\\&&\end{pmatrix},\quad \lambda^2=\begin{pmatrix}&-i&\\i&&\\&&\end{pmatrix}\\
\lambda^3=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&\end{pmatrix},\quad \lambda^4=\begin{pmatrix}&&1\\&&\\1&&\end{pmatrix},\quad \lambda^5=\begin{pmatrix}&&-i\\&&\\i&&\end{pmatrix}\\
\lambda^6=\begin{pmatrix}&&\\&&1\\&1&\end{pmatrix},\quad \lambda^7=\begin{pmatrix}&&\\&&-i\\&i&\end{pmatrix},\quad \lambda^8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{9.4}$$

と与えられ，これはゲルマン行列とよばれている。ここで具体的に数字が記入していないところはゼロを表している。

$\mathcal{L}_{\rm int}$ には場の微分は含まれないと仮定したから，ラグランジアン密度 (9.2) と $\delta\psi = i\epsilon_\alpha \lambda^\alpha \psi$ よりカレントは

$$J^{\alpha\mu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \lambda^\alpha \psi \tag{9.5}$$

と求められる。ϵ_α は独立なので，N^2 個のカレントが定義されたことになる。また，$m_a = M\,(a = 1, 2, \cdots, N)$ で相互作用項がこの変換に対して不変であれば，第3章の議論 (3.16) よりカレントの保存 $\partial_\mu J^{\alpha\mu} = 0$ が示される。以下では $m_a = M$ としておく。

第4.3節で，ローレンツ群には4つの非連結成分 ($\mathrm{L}_{\pm\pm}$) があり，単位元は L_{++} に含まれており，これを狭義ローレンツ変換とよんでいると説明した。狭義ローレンツ変換に含まれない変換は，空間反転 (パリティ変換) のような離散変換と狭義ローレンツ変換の積で表されるので，弱い相互作用のようにパリティ等の離散変換に付随した対称性を特に課す必要がなければ，相対論の要請は狭義ローレンツ変換のもとでの対称性のみを考えればよいことになる。

第4章では狭義のローレンツ変換のもとで，ディラックのガンマ行列を4つ掛け合せたもの，$\gamma^5\,(= -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)$ の固有値 ± 1 に従って分解したディラック・スピノル $\psi_{\rm R} = (1/2)(1+\gamma^5)\psi$，$\psi_{\rm L} = (1/2)(1-\gamma^5)\psi$ は狭義ローレンツ変換のもとで不変であり，独立な物理量と考えてよいことを示した。このことは $\psi_{\rm R}$ と $\psi_{\rm L}$ にそれぞれ違った変換性を与えてよいことを意味する。そこで2つの $U_l(N)$ と $U_r(N)$ を考えて，N 個のL成分スピノル場 $\psi_{\rm L}^\alpha$ は $u_l \in U_l(N)$ に対して $\psi_{\rm L} = u_l\psi$ と変換を受けるが，$U_r(N)$ では変換を受けないものとしよう。$\psi_{\rm R}$ に対してはLとRの役割が入れ替ったものとする。するとこの2つの群の作用は，どちらを先にしても結果は変らず，お互いに干渉し合わない (可換) ので，これを2つの群 $U_l(N)$ と $U_r(N)$ の直積群とよび，$U_l(N) \otimes U_r(N)$ と表記することになっている。空間反転で γ^5 は符号を変えるので右と左の役割が入れ替る。γ^5 に基づいた $U_l(N) \otimes U_r(N)$ であることを強調したいときは，カイラル $U_l(N) \otimes U_r(N)$ といっている。カイラル (chiral) とはラテン語で右手と左手の区別のことである。

このカイラル群の微小変換を考えてみよう。$1 + i\epsilon_\alpha^{(l)}\lambda^\alpha \in U_l(N)$ に対して，$\psi_{\rm L}' = (1 + i\epsilon_\alpha^{(l)}\lambda^\alpha)\psi_{\rm L}$ であるから，ψ に対する変換は，

$$\psi' = \psi_{\rm L}' + \psi_{\rm R}' \tag{9.6}$$

$$= \left[(1 + i\epsilon_\alpha^{(l)} \lambda^\alpha) \frac{1-\gamma^5}{2} + (1 + i\epsilon_\alpha^{(l)} \lambda^\alpha) \frac{1+\gamma^5}{2} \right] \psi \tag{9.7}$$

$$= \left[1 + \frac{i}{2} (\epsilon_\alpha^{(r)} + \epsilon_\alpha^{(l)}) \lambda^\alpha + \frac{i}{2} (\epsilon_\alpha^{(r)} - \epsilon_\alpha^{(l)}) \lambda^\alpha \gamma^5 \right] \psi \tag{9.8}$$

$$= \left[1 + i\epsilon_\alpha^{(v)} \lambda^\alpha + i\epsilon_\alpha^{(a)} \lambda^\alpha \gamma^5 \right] \psi \tag{9.9}$$

となる。ここで $\epsilon^{(v)} = (\epsilon_\alpha^{(r)} + \epsilon_\alpha^{(l)})/2$ と $\epsilon^{(a)} = (\epsilon_\alpha^{(r)} - \epsilon_\alpha^{(l)})/2$ を導入した。カイラル変換のもとでのカレントは $\epsilon^{(r/l)}$ を用いて定義されるが，$\epsilon^{(v/a)}$ からベクトルカレント $J^{\alpha\mu}$ $(= i\bar{\psi}\gamma^\mu \lambda^\alpha \psi)$ と軸性カレント $J_5^{\alpha\mu}$ $(= i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5 \lambda^\alpha \psi)$ が従うので，これは結果的に第 5 章で議論したベクトルカレントと軸性カレントを導入することと同じである。そして軸性カレントはスピノル場に質量項があると保存しないことも指摘したが，これはスピノル場に質量項がある理論ではカイラル対称性は破れていることを意味している。このことは，カイラル対称性がある理論でスピノル場が実質的に質量を有しているとすれば，**原初的には質量のなかったスピノル粒子が相互作用の結果として質量が生まれた**と理解されなければならない。この描像は電弱統一理論で重要な役割を果す。

また CP 変換のもとでは ベクトルカレント J^μ も軸性カレント J_5^μ も不変であると第 5 章で説明したが，これはスピノル場が一種類の場合で，ここで考えているように複数のスピノル場を同時に考え，それらの間の混合まで考慮に入れているときは次のことを考えに入れておかなければならない。すなわち，C 変換のもとでは $\psi \leftrightarrow \bar{\psi}$ の入れ換えが生じており，カレント $\bar{\psi}\{\cdots\}\psi$ でこの入れ換えをすることは，行列 $\{\cdots\}$ の転置をとることを意味している。ガンマ行列についてはこの処理は荷電変換行列 C_γ を使って処理されていたが，λについては済んでいない。λ^α はエルミートにとってあったので，$(\bar{\lambda}^\alpha)^{\mathrm{t}} = \lambda^\alpha$である。この式の転置をとれば，$(\lambda^\alpha)^{\mathrm{t}} = \bar{\lambda}^\alpha$ となる。ここで行列の上に線を引いたものは複素共役を，t を付したものは転置行列を表している。また，$\lambda^{\bar{\alpha}} = \bar{\lambda}^\alpha$ と表記する習わしがあるので，これを使うと，CP 変換のもとでベクトルカレントと軸性カレントは，

$$J^{\alpha\mu} \to J^{\bar{\alpha}\mu}, \qquad J_5^{\alpha\mu} \to J_5^{\bar{\alpha}\mu} \tag{9.10}$$

と変換される。この辺りの議論は 6 元クォーク理論に基づく CP の破れ現象の説明の際にキーポイントとなる。

いま一つカレントについて注意すべきことは，ゲージ理論との関係である。ゲージ理論は微分 ∂_μ を共変微分 $\partial_\mu - iB_\mu$ でおき換えることにより得られると前の章で述べたが，これをスピノル場に適用してみると

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -\bar{\psi}[\gamma^\mu(\partial_\mu - iB_\mu) + M]\psi$$

となる。ここで，接続の係数 B_μ は $N \times N$ の行列であったが，λ 行列を使って，$B_\mu = gB_{\mu\alpha}\lambda^\alpha$ と表してみよう。ここで g は電磁相互作用の場合にならって結合定数を陽に引き出しておいた。これはゲージ場のラグランジアン密度 (8.33) に現れている因子 $1/4g^2$ を $1/4$ に変更する手続きになっている。

これを上の式に代入すると，

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + M)\psi + ig\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^\alpha\psi B_{\alpha\mu} \tag{9.11}$$

$$= -\bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu + M)\psi + igJ^{\alpha\mu}B_{\alpha\mu} \tag{9.12}$$

となっている。$U(N)$ ゲージ理論は $U(N)$ 変換で定義されるカレントにゲージ場 $B_{\alpha\mu}$ が結合した理論であるといえる。

9.2　弱い相互作用とカレント–カレント型理論

原子核のベータ崩壊はパウリの中性微子 ν の導入の後に，フェルミがこの現象は原子核の中で中性子 n が電子 e と反中性微子 $\bar{\nu}$ を放出して陽子に転換する反応であることを明らかにした。この相互作用を場の理論の言葉で書けば，

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} = -\frac{G_{\text{W}}}{\sqrt{2}}(\bar{\text{p}},\, \text{n})(\bar{\text{e}},\, \nu) + \text{h.c.} \tag{9.13}$$

となる，と第 6 章 (式 (6.9)) で説明した。G_{W} はこの相互作用が単位時間にどれほど生じるかを制御する定数で，弱い相互作用定数とよばれている。h.c. は第 1 項のエルミート共役量で，相互作用ラグランジアン密度はエルミートでないと確率が保存しなくなるのでこれが加えられている。$\sqrt{2}$ の因子は項が 2 つあること

を考慮に入れて意識的に分離してある。G_{W} は質量の -2 の次元をもち*)，陽子の質量で無次元化してみると $G_{\mathrm{W}}{m_{\mathrm{p}}}^2 \simeq 10^{-5}$ となり，これが弱い相互作用の名の由来であった。$(\bar{p}, n)$ などの式はスピノル場 $\bar{p}$ と n の積であるが，スピノルの添字がどう処理されているかわからないのでそれを不問にしてこう書いた。

スピノルの添字がどう処理されているかの問題は，実験的に決める努力が 1950 年代中ごろに執拗になされたが成功しなかった。坂田–井上により予言され，パウエルにより発見されたミュー粒子も弱い相互作用で $\mu \to \mathrm{e}\bar{\nu}_{\mathrm{e}}\nu_{\mu}$ と崩壊する。たくさん発見されたV粒子も，荷電パイ粒子も弱い相互作用で崩壊する。当時これらを統一的に取り扱う弱い相互作用の理論は形すら見えなかったが，これらがばらばらの違った相互作用ではなく，1 つの弱い相互作用として認識された背景には，これらの相互作用の強さを，前に述べたようにその現象の特徴的な質量を使って無次元化してみるとほぼ同じ大きさになったという事実があった。これを当時の人々は弱い相互作用の強さの普遍性 (universality) とよんだ。これは後で述べる粒子混合の描像につながってゆく。

V粒子の発見に伴う $\tau-\theta$ パズルを分析して，リーとヤンはパリティ非保存の可能性を指摘し，それを検証する ^{60}C の実験を提案した。ただちにウーによってこれは確かめられて，パリティ非保存の事実は確立した。それに続く実験によって弱い相互作用はパリティの非保存の部分と保存の部分がほぼ同じ強さで共存しているように見えた。この事実からファインマンとゲルマンはスピノル場は右手成分と左手成分に分解でき，空間反転でそれらは入れ替るから，弱い相互作用に左手成分のみしか関与していなければパリティ非保存になり，保存部分と非保存部分が 1 対 1 になると考えた。これをミュー粒子の崩壊に当てはめてみれば相互作用ラグランジアン密度は**)

---

*)　作用積分は確率振幅と同じ次元をもつので無次元である。するとスピノル場の自乗を 1 回微分した量の 4 次元空間積分が無次元となり，これよりスピノル場は長さの次元の $-3/2$ 乗次元であることが導かれる。$c = \hbar = 1$ の自然単位系では，長さと質量は逆の次元をもつので，スピノル場は質量 (M) の $[M^{3/2}]$ となる。式 (9.15) は 4 次元積分をしたものが無次元であるから，これより G_{W} の次元は $[M^{-2}]$ となる。ちなみにスカラー場の次元は運動方程式の微分の回数がスピノル場より 1 回多いことより，同様の考察をすれば $[M]$ となる。

**)　スピノル場 a，b の左手成分を a_{L}，b_{L} として，$\bar{a}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu}b_{\mathrm{L}}$ を計算すると，$2\bar{a}_{\mathrm{L}}\gamma^{\mu} = a^*(1-\gamma^5)\gamma^4\gamma^{\mu} = \bar{a}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)$ であり，$(1-\gamma^5)^2$ より，左手成分を取り出す射影因子 $(1-\gamma^5)$ は 1 か所に入れておけばよい。

$$\mathcal{L}_{\mu\,\mathrm{decay}} = -\frac{G_{\mathrm{W}}}{\sqrt{2}}[\bar{\mathrm{e}}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\nu_{\mathrm{e}}]\cdot[\bar{\nu}_{\mu}\gamma_{\mu}(1-\gamma^5)\mu] \tag{9.14}$$

と書ける。これはその後の実験でよく検証された。

しかし，強い相互作用もしている粒子，ハドロンに対してはこれほど単純ではなかった。実験にかかるハドロンの弱い相互作用の崩壊過程は強い相互作用の影響を被ったものをみているということと，実はハドロンはクォークの束縛状態であり，ハドロンの弱い相互作用は，クォークの弱い相互作用の結果であったことによる。

それでもファインマン–ゲルマンの理論は弱い相互作用の特徴をかなりよく整理した。これを次に見てみよう。弱い相互作用は荷電状態が 1 違う粒子が組になって登場していて，これは弱い相互作用の 2 重項とよばれるが，これらを (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \cdots, L)$ としてみよう。するといままでの知識からすればそれらの弱い相互作用のラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{weak}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1,j=1}^{L} G_{\mathrm{W}}^{ij}[\bar{a}_i\gamma^{\mu}(A_i - B_i\gamma^5)b_i]^{*}\bar{a}_j\gamma^{\mu}(A_j - B_j\gamma^5)b_i \tag{9.15}$$

と書くのが自然であろう。ここで $[\cdots]^*$ はエルミート共役をとることを意味し，G_{W}, A, B は定数である。ここで弱い相互作用の強さの普遍性を次のように理解しよう。i でラベルされた 2 重項は，対となる相手の 2 重項が変っても同じようにふるまうとしよう。するとこれは式 (9.17) が因数分解できて，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{weak}} = -\frac{G_{\mathrm{W}}}{\sqrt{2}}J^{\mu *}J_{\mu} \tag{9.16}$$

$$J^{\mu} = \sum_{i=1}^{L}\bar{a}_i\gamma^{\mu}(A_i - B_i\gamma^5)b_i \tag{9.17}$$

とできることを意味する。カレント J^{μ} は具体的に書けば，

$$\begin{aligned} J^{\mu} = {} & \bar{\nu}_{\mathrm{e}}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\mathrm{e} + \bar{\nu}_{\mu}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)\mu + \bar{\mathrm{p}}\gamma^{\mu}(A_{\mathrm{n}} - B_{\mathrm{n}}i\gamma^5)\mathrm{n} \\ & + \bar{\mathrm{p}}\gamma^{\mathrm{P}}(A_{\Lambda} - B_{\Lambda}\gamma^5)\Lambda \end{aligned} \tag{9.18}$$

となる。このカレントとカレントの積からつくられる相互作用のうち，ベクトルカレントまたは軸性カレントどうしの積はパリティを保存するが，交差した積は非保存となり，保存と破れの比がほぼ 1 対 1 になることが理解できよう。そして

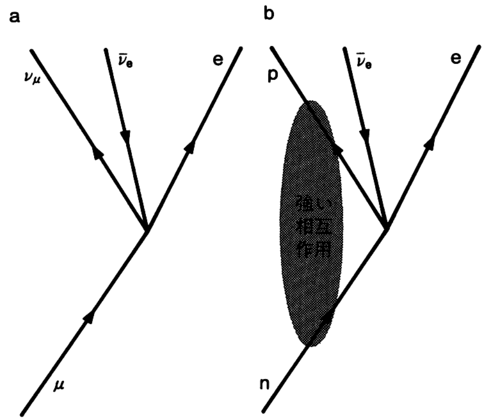


図 9.1　強い相互作用による弱い相互作用の修飾

これは例えば，Λ 粒子の崩壊，$\Lambda \to \mathrm{pe}\bar{\nu}_\mathrm{e}$ が許されれば，$\Lambda \to \mathrm{p}\mu\bar{\nu}_\mu$ もまた等しく存在することを意味している。

1960 年にゲルマンとレビ (M.Levy) はこの理論の枠組の中でおもしろいことに気づいている。それは実験によると $A_\mathrm{n} \simeq 0.98$，$A_\Lambda \simeq 0.2$，$B_\mathrm{n} \simeq 1.2$ と推定された。ここでまず A_n はレプトンの場合にほぼ等しくて，1 に近いが，B_n は 1 からずれているのはなぜかという問題である。図 9.1 を見てほしい。$\mu \to \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}\nu_\mu$と違い，$\mathrm{n} \to \mathrm{pe}\bar{\nu}_\mathrm{e}$ では，p と n は強い相互作用をするので，実験で見ているものは強い相互作用による修飾を受けた結果である。このとき $(\bar{\mathrm{p}}, n)$ のつくるカレントが保存していれば，いくつかの寄与が打ち消し合って強い相互作用の影響が残らないことがくり込み理論で知られている。ここで弱い相互作用のベクトルカレントは $\bar{\mathrm{p}}\gamma^\mu\mathrm{n}$ でこれはアイソスピンカレントそのものであり*)，アイソスピン対称性は強い相互作用のよい対称性であったから，これは保存していると考えてよい。しかし，軸性カレントはスピノル場に質量があると保存しなかった。このために，

*)　$N^\mathrm{t} = (\mathrm{p}, \mathrm{n})$ として，アイソスピン変換は，$N' = uN$ $(u \in SU(2))$ であるから，これの微小変換，$N' = (1 + i\epsilon_a\tau^a)N$ を考えれば，これに対応するカレントは (式 (9.7))，$J^{\alpha\mu} = i\bar{N}\gamma^\mu\tau^a N$ となり，$(J^{1\mu} + iJ^{2\mu})/2 = i\bar{p}\gamma^\mu n$ となる (式 (6.14) の下の議論を参照)。

強い相互作用の影響は A_{n} には現れず，B_{n} にのみ寄与した結果であると彼らは結論した。

ではなぜ A_{n} はわずかではあるが 1 より小さく，A_{Λ} はさらに小さいのであろうか。これに対して彼らはおもしろい事実に気づいた。$A_{\mathrm{N}} = \cos\theta$，$A_{\Lambda} = \sin\theta$ としてみるのである。すると，$\sin\theta = 0.2$ としてみると，$\cos\theta = 0.98$ となる。これは，p と組になって弱い相互作用の 2 重項をつくっていたのは，ばらばらの n や Λ ではなく，それらが角度 θ で混合したものであって，2 重項は

$$\begin{pmatrix} p \\ n\cos\theta + \Lambda\sin\theta \end{pmatrix} \tag{9.19}$$

と考えればよい。この 2 重項がつくるウィークカレントは，$\bar{p}\gamma^{\mu}(1-\gamma^5)(n\cos\theta + \Lambda\sin\theta)$ と理解できる。この考えをクォーク模型に即してハドロン全般にわたりカビボ (N.Cabibbo) が検討したので，この角を今日カビボ角とよぶようになった。

荷電パイオンや K 粒子は荷電レプトンと中性微子に崩壊するが，K 粒子は 2 つまたは 3 つのパイオンにも崩壊できる。pnΛ を基本粒子とする坂田模型の立場に立てば，π^+ や K^+ 粒子の弱い相互作用による崩壊過程もうまく説明できる。例

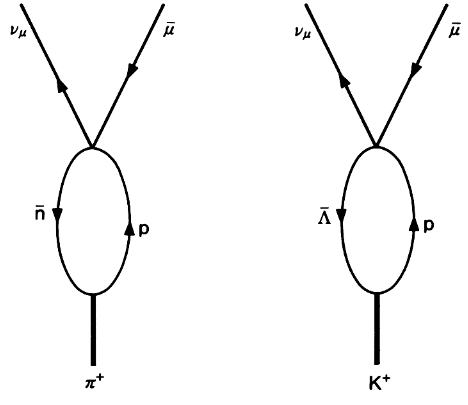


図 9.2　中間子のレプトニック崩壊

えばレプトン 2 つに崩壊するものをレプトニック崩壊とよぶ (ハドロンのみに崩壊するモードはハドロニック崩壊) が，これらの中間子は p と $\bar{\mathrm{n}}$，そして p と $\bar{\Lambda}$ の束縛状態であるから，図 9.2 のように考えればよい。ハドロニック崩壊も同様に考えて，それに強い相互作用の効果を Λ をクォーク粒子 uds におき換えるだけでよい。

9.3　カレント–カレント型理論の意味するもの

弱い相互作用がウィークカレントの積で書けるとわかり出すと，電磁相互作用と同じようにゲージ理論で，すなわちそのカレントに結合するベクトル粒子の媒介で記述できないか，との考えが浮んでくる (図 9.3)。第 6 章の最後で議論したように，媒介子の質量が M_W であれば，それにより媒介される距離は ${M_\mathrm{W}}^{-1}$ であると紹介した。弱い相互作用がカレントの積で書けることからわかるように，この伝搬の距離はたいへん短い距離であり，すなわちこの M はたいへん大きいと考えられる*)。ゲージ場は光子の例でもわかるようにゼロ質量であった (第 6 章，第 8 章)。だから弱い相互作用をゲージ理論で記述するためには，ゲージ場に質量を与える機構の発見が必要であった。これは後の章で紹介する。この過程で軸性カレントが保存する理論のもとでスピノル場に質量が生まれる機構も同時に明らかとなる。

ゲージ場 (いまの場合，これの表す粒子を W ボソンとよぼう) の結合するカレントはゲージ変換に対応したカレントであるから保存カレントでなければならない。するとウィークカレントの第ゼロ成分を空間積分した量 $Q_\mathrm{W} = \int \mathrm{d}^3x\, J_0$ の時間微分はゼロとなる。そしてこの Q_W は電荷を 1 つ変化させるので，エルミート生成子ではないから，Q_W^* は Q_W と独立である。この生成子が引き起こす変換のつくるカレントは $J^{*\mu}$ で，これには W ボソンの反粒子 $\bar{\mathrm{W}}$ が結合している。すなわち 荷電が ±1 のウィークボソン $\mathrm{W}^\pm$ があることになる。そして，計算してみ

*)　媒介子がウィークカレントに結合する強さを g として，これは電磁相互作用と同じほどの強さだとしてみよう ($g \simeq e$)。このとき $G_\mathrm{W} \simeq g^2/{M_\mathrm{W}}^2$ となることが知られているので，電磁相互作用の強さ $e^2/4\pi \simeq 10^{-2}$ と弱い相互作用の強さ $G_\mathrm{W}{m_\mathrm{p}}^2 \simeq 10^{-5}$ を使うと，$M_\mathrm{W} \simeq 10^2 m_\mathrm{p}$ となって，陽子の質量の約 100 倍ということになる。実際にウィークボソン $\mathrm{W}^\pm$, Z^0 はこれに近い質量で 1983 年に発見された。

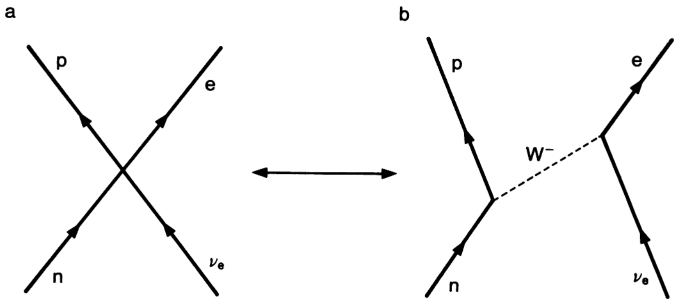


図 9.3 弱い相互作用の媒介子描像

るとわかることであるが，Q_{W} と Q_{W}^* の交換子積，$Q_{\mathrm{W}}^0 = [Q_{\mathrm{W}}, Q_{\mathrm{W}}^*]$，をつくってみると，$Q_{\mathrm{W}}^0$ は非ゼロで，荷電を変化させない生成子であることがわかる。さらに，Q_{W} と Q_{W}^* の時間微分がゼロであるから，Q_{W}^0 もそうである。これは Q_{W} と Q_{W}^* がゲージ変換に対応しており，それらの微小変換が非可換である結果生まれた Q_{W}^0 の引き起こす変換もまたゲージ変換でなければならない。だから，弱い相互作用をゲージ化すれば媒介子 (ゲージボソン) には中性のウィークボソン Z も存在しなければならない，と結論される。そしてこのような非可換なゲージ変換が 3 つあるということは，少なくともゲージ群としては $SU(2)$ を含む理論でなければならないことがわかる。

次にカレント–カレント型理論が導いた重要な結論である，CP 変換に対する対称性の話をする。カレントはベクトルカレントでも軸性カレントでも，CP 変換のもとでは，カレントを構成しているバーをつける場とつけない場の役割が入れ替る点を除いてそのほかは不変であると前に説明した。いまの場合，定数 A と B が実数であれば，このことは $J \to J^*$ となることを意味しているので，ラグランジアン密度 (9.16) は不変となる。ウィークカレントのハドロン部分が弱い相互作用の 2 重項 (9.19) で決まっていれば，定数 A や B たちは実数なので弱い相互作用は CP 対称性が保たれていることになる。パリティ P は非保存であるが，その代りに CP が保存しているのだとしばらく考えられていた。しかしこれも非保

存であることが実験的に明らかとなる (1964 年)。

パリティ非保存発見の契機となった τ–θ パズルに登場した τ, θ 粒子は今日の命名法では，奇妙さ数をもった擬スカラーボソン K 粒子のことである，と前に説明したが，CP の破れ現象の発見でもこの K 粒子が登場する。K 粒子は荷電をもたない中性の粒子でも，奇妙さ数をもっているので，これが 1 の粒子 (K^0) と -1 の反粒子 ($\bar{\mathrm{K}}^0$) の区別がある。弱い相互作用はパリティが非保存なので，K^0 粒子はパリティ状態がプラスの 2π 崩壊モードとマイナスの 3π モードがある。ここで CP がよい保存量ならば，この量を使って K^0 と $\bar{\mathrm{K}}^0$ の状態をラベルしてみることにする。K^0 が 1 個ある状態を $|\mathrm{K}^0\rangle$, $\bar{\mathrm{K}}^0$ が 1 個ある状態を $|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle$ と書くことにする。CP 変換のもとで $|\mathrm{K}^0\rangle$ は $-|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle$ となる。これは K 粒子が擬スカラー粒子であるから P 変換でマイナス符号がついたのと，C 変換で粒子が反粒子に変ったことによる。同様に $CP|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle = |\mathrm{K}^0\rangle$ である。$|\mathrm{K_L}\rangle = (|\mathrm{K}^0\rangle + |\bar{\mathrm{K}}^0\rangle)/\sqrt{2}$, $|\mathrm{K_S}\rangle = (|\mathrm{K}^0\rangle - |\bar{\mathrm{K}}^0\rangle)/\sqrt{2}$ を導入すれば，

$$CP|\mathrm{K_S}\rangle = |\mathrm{K_S}\rangle, \qquad CP|\mathrm{K_L}\rangle = -|\mathrm{K_L}\rangle \tag{9.20}$$

となる。軌道角運動量がゼロの 2π 状態 $|2\pi\rangle$ は C 変換による粒子の入れ換りの際に符号は変らないので CP はプラスであり，3π 状態 $|3\pi\rangle$ は π の擬スカラー性から生じる因子 $(-1)^3$ により，CP はマイナスになる。すると弱い相互作用で CP が保存しているならば，これらの崩壊は $\mathrm{K_L} \to 3\pi$, $\mathrm{K_S} \to 2\pi$ となる。2 体崩壊と 3 体崩壊を比べてみると，終状態の状態密度の関係で，2 体崩壊の方が早く崩壊する (life time が短い)。このために CP がプラスの方に Long の L がついた。S は Short の S である。

クローニン (J.W.Cronin), フィッチ (V.L.Fitch) たちは高速に加速した陽子を原子核に当てて中性の K 粒子をつくった。$\mathrm{K_S}$ の寿命は 0.89×10^{-10} sec であり，$\mathrm{K_L}$ は 5.1×10^{-8} sec であるが，これらはほぼ光速の粒子ビームなので，$\mathrm{K_S}$ は数センチメートルほど走れば崩壊してなくなるが，$\mathrm{K_L}$ は 15 メートルほど走る。このことは，中性の K 粒子の発生点から 10 メートルほど下流のポイントでは $\mathrm{K_S}$ 成分はまったくないと考えてよい。すると CP がよく保存しているならこのポイントでは，3π 崩壊しか測定にかからないはずである。しかし，彼らの実験では，わずかではあるが 2π 崩壊が測定にかかったのである。こうして弱い相互作用よ

りさらに数百分の1の強さで CP の破れの現象が起こっていることが確立した。

当時この現象の解釈をめぐって多くの仮説が現れた。この現象は弱い相互作用による現象よりさらに生じる頻度が少ないので，いままで観測にかからなかった新しい第5の力 (相互作用) が初めて観測されたのだとする説も多く出された。これが弱い相互作用の理論の枠組の中で理解できる現象であることがわかるには，さらに弱い相互作用に対する知識が増す必要があった。これは別の章で紹介する。

第10章

ゲージ理論とは（II）

10.1　対称性と有限自由度系の基底状態

無限自由度の量子系で生じる固有の現象，対称性の自発的破れの説明に入る前に有限自由度の系で何が生じるか，そして無限自由度になるとどうなるかを考えよう。

まず空間1次元で図10.1(a)で示されたポテンシャル $V(x)$ 中にある粒子の運動を考える。$x = \pm\infty$ で $V = \infty$ であるポテンシャルの固有状態は離散的であることがわかっている。また $V(x)$ が下に有界であれば基底状態が存在する。粒子が古典力学で記述されているのであれば，あるエネルギーをもった粒子はそのエネルギーで許される範囲（図10.1(a)の点線矢印の部分）を往復している。量子系では粒子は波でもあるのでその領域の外まで少しにじみ出している。

次に図10.1(b)のW型をしたポテンシャル中での運動を考察してみよう。古典軌道は点Aのまわりの運動と点Bのまわりの運動が可能であるが，量子系で考えると図10.1(a)の類推から，点Aのまわりに広がった波動関数 ψ_{A} と点Bのまわりに広がった波動関数 ψ_{B} が考えられる。しかし量子力学ではトンネル効果の存在が知られている。ある時刻に点Aに粒子が存在し，ポテンシャル中央にエネルギー障壁があったとしても，時間とともに点Bの方ににじみ出してゆくはずである。そして左右同じ存在確率になるまでこれは進行するはずであるが，点Aから始める場合と点Bからの場合と2通りあるはずなので，落ち着き先も2種類あるはずである。ではそれらはどのような波動関数なのであろうか。これに答えるに

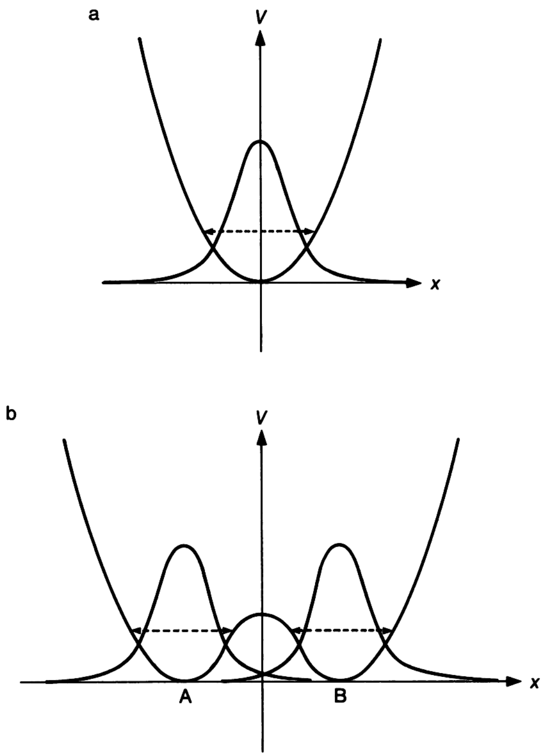


図 10.1 ポテンシャルと古典軌道，量子力学の波動関数。無限遠方で十分大きくなるポテンシャル中での粒子の古典的運動は，エネルギー的に許される領域を往復している。量子力学では粒子は波としての性質も有するので，古典軌道の外にもしみ出している。

は次の定理が有用である。いま考えている系のハミルトニアンを $\mathcal{H}$ とし，ポテンシャルを $V(x)$ とする。

$$\mathcal{H} = \frac{-1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \tag{10.1}$$

ここで定理は次のように書ける。

ポテンシャル $V(x)$ が下に有界で $x = \pm\infty$ で $V = \infty$ であり，左右対称 $(V(x) = V(-x))$ であれば，その系の基底状態は偶関数である。

この定理を理解するには変分原理を使うのが便利である。固有値がすべて離散的である系では，その固有関数を $\psi_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ とし，固有エネルギーを $E_n\,(n < m$ のとき $E_n \leq E_m)$ とすると，すべての関数 ψ ($\int \mathrm{d}x\, \psi^* \psi = 1$) は，この ψ_n を使って展開できる。

$$\mathcal{H}\psi_n = E_n\psi_n, \qquad \int \mathrm{d}x\, \psi_n^* \psi_m = \delta_n m,$$

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* c_n = 1$$

この事実に留意すれば，ψ によるエネルギーの期待値は，

$$\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* c_n E_n = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* c_n (E_n - E_0) \tag{10.2}$$

と書けるので，基底状態のエネルギー E_0 より常に大きい。だから任意の試験関数 ψ を使ってエネルギー期待値を計算してある値が得られたら，系の基底エネルギーは常にそれより小さいといえる。この事実を用いると，基底状態の波動関数はゼロ点をもたないことが結論できる。これを次に示そう。

もし基底状態を表す波動関数 ψ がゼロ点 O をもつとすると，これよりエネルギー期待値の小さい試験関数があることを示すことにより，ゼロ点をもつ関数が基底状態の波動関数ではありえないことを示す。

点 O にゼロ点のある波動関数 ψ をもとに，新たな試験関数 ψ' をつくることにする。まず第 1 の操作でゼロ点の右側を上下反転させる (−1 倍する)。すると点 O で突点ができるので，点 O の左右 δ $(0 < \delta \ll 1)$ を 2 次曲線でなめらかにつな

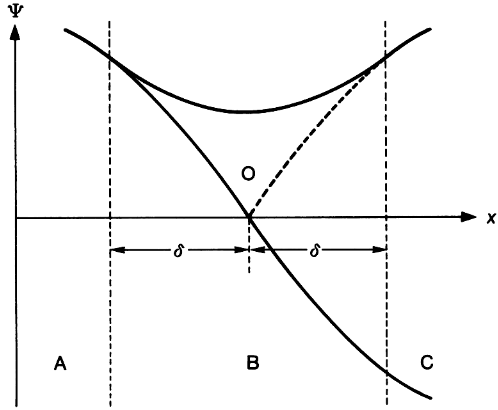


図 10.2　波動関数のゼロ点をなくす。ゼロ点のある波動関数を、ゼロ点 O の右側で上下反転させる。すると突点ができるので，領域 B で 2 次関数でなめらかにつなぐ。

ぐことにする (図 10.2)。この波動関数を ψ' とする。この試験関数のエネルギー期待値を ψ のものと比較してみよう。領域 A と C (図 10.2) では両者は等しいので領域 B での期待値のみ計算すればよい。ハミルトニアンを運動量部分とポテンシャル部分に分けて考える。O を原点とする座標系 x を用いると領域 B で波動関数 ψ は $\psi \simeq -\lambda x$ (λは定数) と近似でき，ψ' は $\lambda[(x^2/2\delta)+(\delta/2)]$ と書ける*)。いずれにしても波動関数は領域 B では δ くらいの量であるから，幅 2δ で積分したポテンシャルの期待値はオーダー δ^3 の量である。すぐにわかるように運動量の期待値はオーダー δ の量なので，この項は無視して差し支えない。

次に運動量の期待値を計算する。無限遠方で $\psi(\pm\infty)=0$ に注意すれば，$\int \mathrm{d}x\, \psi(-\partial^2/\partial x^2)\psi = \int \mathrm{d}x\,(\partial\psi/\partial x)^2$ となる。ゆえに領域 B からの寄与は $2\lambda^2\delta$ である。同様に ψ' の場合は $2\lambda^2\delta/3$ となり，

$$\langle\psi|\mathcal{H}|\psi\rangle > \langle\psi'|\mathcal{H}|\psi'\rangle \tag{10.3}$$

*)　領域 B で x はオーダー δ の量である。

が結論できる。すなわち基底状態の波動関数にはゼロ点がないと結論できる**)。

次に W 型ポテンシャル (図 10.1(b)) の場合を考察する。系は空間反転 P のもとで対称であるから，パリティ P と H は同時に対角化できるので，エネルギーの固有関数はそれぞれ偶関数か奇関数である。いままでの考察と合せると基底状態の波動関数は偶関数ということになる。すなわち W 型ポテンシャルの場合にも，基底状態において左右の対称性は破れることはない。点 A と点 B に局在した状態 $\psi_{\rm A}$ と $\psi_{\rm B}$ は，中央のエネルギー障壁が有限である限りにじみ出しがあり，状態の混合が生じ，$\psi_{\rm A}\pm\psi_{\rm B}$ がエネルギーの固有状態に (近似的に) なる。そして対称な方がエネルギーが低くなるのである。このことは有限自由度であれば一般化できて，ハミルトニアンが対称性をもっていれば，その基底状態も同じ対称性をもっていると拡張できる。

10.2　対称性の自発的破れとヒッグス機構

有限自由度の量子系では基底状態の対称性はハミルトニアンのもつ対称性より小さくなる (対称性の自発的な破れ) ことはないと前の節で説明したが，無限自由度の量子系では，無限自由度であるため対称性は力学系の性質によっては自発的に破れることがある。このことを説明しよう。

まず話を簡単にするために複素スカラー場 ϕ のみの系を考えよう。この系のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を以下のようにとろう。この系は前にも指摘したが，ϕ の位相を変える変換に対して不変である。この対称性がどうなるかに関心がある。

$$\mathcal{L}=-[\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi+V(\phi^*,\phi)] \tag{10.4}$$

$$V(\phi^*,\phi)=\lambda(\phi^*\phi-a^2)^2 \tag{10.5}$$

この系のハミルトニアン H は

$$H=\int \mathrm{d}x\,[\pi^*(x)\pi(x)+\nabla\phi^*(x)\nabla\phi(x)+V(\phi^*(X),\phi(X))] \tag{10.6}$$

となる。項 V があることは，このスカラー場が自己相互作用をしており，式 (10.5) から，その相互作用エネルギーは $\phi(\boldsymbol{x})=\exp[i\theta(x)]a$ のときゼロになることを示

**)　もしゼロ点が複数あれば，なくなるまでこの操作をくり返す。

している。また，π は ϕ の正準共役量である。ここで H の第 2 項の ϕ の微分を含んだ項を無視すれば，この理論は $\boldsymbol{x}$ でラベルされた場 $\phi(\boldsymbol{x})$ ひとつひとつが W 型ポテンシャル V 中を運動している，前の節で議論した力学系と同じである。H の第 2 項はこれらの振動子 $\phi(\boldsymbol{x})$ たちが同期して運動したとき，結合のエネルギーが最低になるように作用し合っている。

このことを考慮しながら第 1 近似として π の項を無視して考えれば，系のエネルギーの最低状態は位相が定数 $(\theta(x) = \theta_0)$ の $\phi(\boldsymbol{x}) = \exp[i\theta_0]a$ のときである。θ_0 の値は決まらない。これは前の節の話でポテンシャルの最小点が点 A と点 B であったことに対応する。では量子効果 (H の第 1 項，すなわち π の 2 次の項) を取り入れたとき，違った θ_1 の状態と混合が生じて対称性が回復するのであろうか。無限自由度系ではこれが生じないのである。

これは $\boldsymbol{x}$ でラベルされた無限個の変数 $\phi(\boldsymbol{x})$ の値がいっせいに θ_0 から θ_1 に変らなければならない。ひとつひとつの変数はトンネル効果である確率で変化できるとしても，それが無限個あるということは無限個の 1 以下の確率の積になるので，これはゼロである。量子効果で広がりが生じるとしても，$\phi(\boldsymbol{x})$ の真空期待値は $\langle \mathrm{vac}|\phi(\boldsymbol{x})|\mathrm{vac}\rangle = \exp[i\theta_0]a$ であり，ゼロとはならない。一方系のもつ対称性 $U(\alpha)\phi U^*(\alpha) = e^{i\alpha}\phi$ に対して真空が不変 $(U(\alpha)|\mathrm{vac}\rangle = |\mathrm{vac}\rangle)$ であれば，

$$\langle \mathrm{vac}|U(\alpha)\phi U^*(\alpha)|\mathrm{vac}\rangle = \langle \mathrm{vac}|\phi|\mathrm{vac}\rangle = \phi_{\mathrm{vac}} \tag{10.7}$$

$$= \langle \mathrm{vac}|e^{i\alpha}\phi|\mathrm{vac}\rangle = e^{i\alpha}\phi_{\mathrm{vac}} \tag{10.8}$$

である。上段の式は真空の不変性から，下段の式は ϕ の変換則から導かれる。式 (10.7) と式 (10.8) が等しいことから $\phi_{\mathrm{vac}} = 0$ と結論される。ラグランジアン密度 (10.5) で記述される真空が $\langle \mathrm{vac}|\phi(\boldsymbol{x})|\mathrm{vac}\rangle \neq 0$ ということは真空の対称性が自発的に (力学の結果として) 破れたことを意味する。

自発的に対称性が壊れたとき，初めにあった対称性はどこにいったのであろうか。ϕ の真空期待値が $ae^{i\theta_0}$のとき，当然それが $ae^{i\theta_1}$ である真空も存在する。このことは真空が無限に縮退していることを意味している (量子論的作用によって相互に遷移することはないが)。この真空の縮退は次のような現象をもたらす。θ_0 の真空の空間の一部を θ_1 の真空でおき換えてみるのである。図 10.3 を見てほしい。いま考えている θ_0の真空で ϕ の位相が図 10.3(a) のようになっていたとす

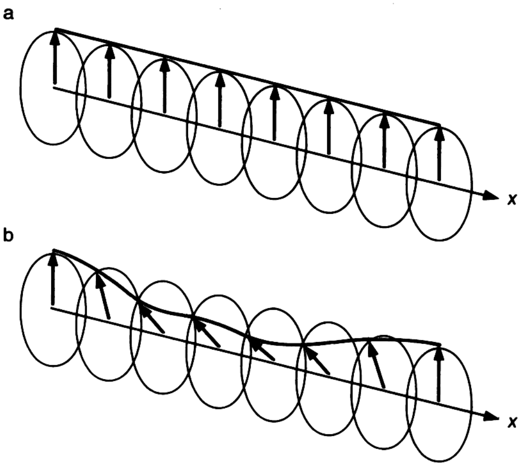


図 10.3　スカラー場の真空期待値の空間的変動。南部–ゴールドストン・ボソンの存在。

る。次に有限の自由度なら位相を変化させた状態も考えることが許されるので，図 10.3(b) のような状態を考えてみる。ϕ の絶対値が同じならポテンシャル項の値は同じである。問題は H の第 2 項の微分を含んだ項であるが，これは微分を含んでいるので，位相の変化率が小さければいくらでも小さくする (長波長励起) ことができる。この考察より真空に対してエネルギー的にいくらでも近い励起状態があることを意味している。これは南部 (陽一郎)–ゴールドストン (J.Goldstone) ボソンとよばれるゼロ質量の粒子の存在によって実現している。

ラグランジアン密度 (10.4) を使ってこのようすを見てみよう。まず場の変数を $\phi = e^{i\theta/a}(a+\rho)$ と書き換え，θ と ρ が変数だとする。これをラグランジアン密度に代入すると，

$$\mathcal{L} = -\left[\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho + \frac{(a+\rho)^2}{a^2}\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta + V(a+\rho)\right] \tag{10.9}$$

$$= -\left[\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho + \partial^\mu\theta\partial_\mu\theta + \left(\frac{2\rho}{a}+\frac{\rho^2}{a^2}\right)\partial^\mu\theta\partial_\mu\theta + V(a+\rho)\right] \tag{10.10}$$

となる。式 (10.10) の第 3 項は θ 場と ρ 場の相互作用を，第 4 項は ρ の自己相互作用項を表している。また $V(a+\rho) = \lambda(4a^2\rho^2 + 4a\rho^3 + \rho^4)$ より，ρ の 2 次の

係数は $4\lambda a^2$ であるから，これが ρ の質量である。θ の微分を含まない 2 次の項はないので，θ はゼロ質量であることがわかる。ゆえにこれが南部–ゴールドストン粒子ということになる。変換 $U(\alpha)$ に対しては定義より ρ は不変であり，θ は $\theta+\alpha a$ となる。θ 場はラグランジアン密度の中に必ず微分を伴って現れているのでこの変換のもとで不変である*)。

次にこの系に $U(1)$ ゲージ場を結合させてみよう。この場合のラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L} = -[(\partial^\mu + ifB^\mu)\phi^*(\partial_\mu - ifB_\mu)\phi + V(\phi^*, \phi)] + \mathcal{L}_{\text{gauge}} \tag{10.11}$$

となる。B_μ がゲージ場で，f はゲージ場の結合定数，$\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ はゲージ場のラグランジアン密度である。この系はゲージ変換に対して不変なので，$\phi(\boldsymbol{x}) \to \exp[i\alpha(\boldsymbol{x})]\phi(\boldsymbol{x})$ と書き換えても，これに対応した変換をゲージ場にも施せば不変に保てる。この性質を使えば，$\phi = \exp(i\theta/a)(\rho + a)$ としたときの θ を消去できて，$\phi = \rho + a$ となる。これを式 (10.11) に代入して，微分を含まない B_μ の 2 次の項の係数を求めてみると，$a^2 f^2$ となる。ゲージ場には質量項がないと前に説明したが，対称性の自発的破れが生じると，ゲージ場に質量が現れるのである。これをヒッグス (P.Higgs) 機構とよんでいる。

対称性の自発的破れやヒッグス機構とよばれる現象の発見は超伝導や超流動現象の物性理論研究においてなされたが，これが相対論的に不変な理論でとらえられ，個々のモデルによらず対称性が自発的に破れれば，ゼロ質量のスカラー粒子 (南部–ゴールドストン粒子) が現れ，系がゲージ場に結合していればそのスカラー粒子は消えてゲージ粒子が質量をもつという定理としてとらえられたのは，1960 年代の初めの素粒子研究においてであった。

南部–ゴールドストンの定理が発見されたとき，これはたいへん魅力的な現象であった。われわれの世界を見たとき，自然現象にそれほど多くの対称性があるわけではない。当時はクォーク模型発見以前であったので坂田模型で考えるとして，基本粒子の Λ 粒子の質量は p や n よりなぜ重いのか説明がなかった。そこで，「本

---

*)　θ が粒子像をもった真空 $|\theta\rangle$ は，場が粒子の消滅演算子と (反) 粒子の生成演算子の和であることに注意すれば，$\langle\theta|\theta|\theta\rangle$ である。位相変換をして新たな変数 $\theta' = \theta + \alpha a$ を導入する。これに対応した真空を $|\theta'\rangle$ とすると，$\langle\theta|\theta'\rangle$ が示せる。これが図 10.3 の説明で，異なる角度の状態は重なりがない，と言葉で説明したことの内容である。2 つの状態の間に有限個の演算子を挿入しても，同じくゼロになる。

来は等しかったが，力学の結果として自発的に等しくなくなった」とこの現象を使えないか，と当時の人は考えた。そうだとすると，強い相互作用をする南部–ゴールドストン・ボソンが現れるはずであるが，現実にはそれは存在していない。そこでこの定理崩しの研究が多くの人によりなされた。対称性は自発的に破れるが，ゼロ質量ボソンが現れないようにするにする方法である。この系にゲージ場を結合させればよいことがヒッグスにより発見され，これをヒッグス機構と今日よぶ。しかし，基本粒子の質量の問題は今日にいたるも解決していない。

最後に，位相の自由度はどこにいったのかを説明しておこう。ゲージ場のようなゼロ質量の粒子はどのようなローレンツ変換をしても静止状態にできない。このことは非ゼロ質量粒子と違った特殊な性質をもつことになる。ベクトル粒子はスピンが 1 なので，特定方向のスピン成分の値は ± 1 と 0 の値をとることが許される。しかし，ゼロ質量のベクトル粒子は静止系がないために，進行方向のスピン成分は ± 1 の 2 自由度しかない。これがヒッグス機構で非ゼロ質量粒子になれば，スピンの自由度は 3 になる。この増加した自由度は，消えた南部–ゴールドストン粒子の自由度に対応している。

10.3　ヒッグス機構と電弱統一理論

電磁相互作用 (QED) は $U(1)$ ゲージ理論であることが早くからわかっていた。一方，弱い相互作用はパリティ非保存の現象の発見を契機として整理が進み，カレント–カレント型理論にまとめられ，パリティ最大破れの事実より，弱い相互作用において基本粒子の左手成分のみが寄与していると考えられることが明らかになった。そして弱い相互作用に現れるカレントは，電荷の差が 1 である 2 つの粒子の左手成分からなる弱い相互作用の 2 重項を考え，これの $SU(2)$ 変換がつくるカレントと理解できた。そうすればこの $SU(2)$ 群をゲージ化して，ゲージ粒子 (ウィークボソン) がカレント間に交換されて生じる相互作用を弱い相互作用と見なせた。この考えの唯一の困難は，弱い相互作用の現象を数値的に合せるためには，このウィークボソンに陽子の 100 倍ほどの質量をもたせなければならない，ということであった。当時はゲージボソンはゼロ質量と考えられたからである。し

かし，1964 年にヒッグス機構が発見され，ゲージボソンに質量をもたせる機構が明らかとなった。これで電弱統一理論への準備が整った。1967 年にワインバーグ (S.Weinberg) が，翌年にサラム (A.Salam) がこの理論を発表した。今日この理論をワインバーグ–サラム理論 (WS) とよんでいる。次にこの理論を紹介しよう。

まず電荷が a の N 個のディラック粒子 $u^i\,(i=1,2,\cdots,N)$ と電荷 $a-1$ の N 個のディラック粒子 $d^i\,(i=1,2,\cdots,N)$ を考える*)。これらを右手成分と左手成分に分けて考える。

$$\begin{aligned} u^i_{\mathrm{L}} &= \frac{1-\gamma^5}{2}u^i, \qquad u^i_{\mathrm{R}} = \frac{1+\gamma^5}{2}u^i \\ d^i_{\mathrm{L}} &= \frac{1-\gamma^5}{2}d^i, \qquad d^i_{\mathrm{R}} = \frac{1+\gamma^5}{2}d^i \end{aligned} \tag{10.12}$$

u^i_{L} と d^i_{L} は $SU(2)$ の 2 重項をなしているとし，u^i_{R} と d^i_{R} は 1 重項，すなわち変換は受けないものとしよう。またこの 2 重項をまとめて q^i_{L} と表記しよう。

$$q^i_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} u^i_{\mathrm{L}} \\ d^i_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \tag{10.13}$$

次にヒッグ粒子 h を考える。これもゲージ変換のもとで 2 重項として変換するものとする。

$$h = \begin{pmatrix} h^+ \\ h^0 \end{pmatrix} \tag{10.14}$$

ここで h^0 の電荷は 0 で，h^+ は 1 とした。ゲージ変換 $g(\boldsymbol{x})$ $(\in SU(2))$ のもとで，q^i_{L} と h は，

$$q^{i'}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})q^i_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}), \qquad h^{'}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) \tag{10.15}$$

と変換されるので，2 つの 2 重項，h と q^j_{L} の内積 $h^* q^j_{\mathrm{L}}$ はゲージ不変であり，スピノルの添字を $\bar{d}^i_{\mathrm{R}}$ で縮約すれば，$\bar{d}^i_{\mathrm{R}} h^* q^j_{\mathrm{L}}$ はゲージ不変でローレンツ不変でもある。また第 4 章の最後の部分で説明したように，$SU(2)$ の元 g については 2 行 2 列の反対称行列 ϵ_2 に対し $g^{\mathrm{t}}\epsilon_2 g = \epsilon_2$ が成り立つので，$\bar{u}^i_{\mathrm{R}} h^{\mathrm{t}} \epsilon_2 q^j_{\mathrm{L}}$ もゲージ不変で，かつローレンツ不変でもある。これらは電荷を保存している。そして $h^* h$ もゲージ不変である。このことより，

---

*)　レプトン族では (ν_e, e), (ν_μ, μ), (ν_τ, τ) が，クォーク族では (u, d), (c, s), (t, b) がそれぞれ 3 つの 2 重項になっている。a の値はレプトン族では 0，クォーク族では 2/3 である。

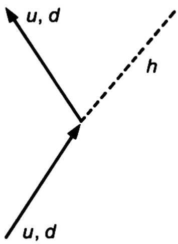


図 10.4　ヒッグス粒子の湯川型相互作用

$$\mathcal{L}^{u}_{\mathrm{yuk}} = -f^{u}_{ij}\bar{u}^{i}_{\mathrm{R}}h^{\mathrm{t}}\epsilon_2 q^{i}_{\mathrm{L}} + \mathrm{h.c.} \tag{10.16}$$

$$\mathcal{L}^{d}_{\mathrm{yuk}} = -f^{d}_{ij}\bar{d}^{i}_{\mathrm{R}}h^{*} q^{i}_{\mathrm{L}} + \mathrm{h.c.} \tag{10.17}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{h-pot}} = -\lambda(h^{*}h - v^2)^2 \tag{10.18}$$

は，ゲージ不変な基本粒子とヒッグス粒子の湯川型相互作用 (図 10.4) と，ヒッグス粒子の W 型自己相互作用を表すラグランジアン密度となる (ここで，i, j のようにくり返される添字については、そのとりうる範囲について和をとる。以下でも同じ)。式 (10.16) と式 (10.17) の h.c. は前の項のエルミート共役を表している。f は湯川型相互作用の結合定数である。

次に $U(1)$ ゲージを考えよう。これは電磁相互作用のゲージそのものではないが，後でわかるように，このゲージが $SU(2)$ ゲージの一部と混じり合って電磁場の自由度になる。ゲージ理論は場のゲージ変換のもとでの変換性を決めれば決まるので (第 8 章参照)，この $U(1)$ 変換，$U(\theta)$ のもとで，

$$\begin{aligned} q^{i'}_{\mathrm{L}} &= \exp(ig'_{\mathrm{q}}\theta)q^{i}_{\mathrm{L}}, \qquad & u^{i'}_{\mathrm{R}} &= \exp(ig'_{\mathrm{u}}\theta)u^{i}_{\mathrm{R}} \\ d^{i'}_{\mathrm{R}} &= \exp(ig'_{\mathrm{d}}\theta)d^{i}_{\mathrm{R}}, \qquad & h^{i} &= \exp(ig'_{\mathrm{h}}\theta)h \end{aligned} \tag{10.19}$$

と変換するものとする。これら g' は u, d, h の電荷と関係した量であるが，具体的な値は 1 重項ならその電荷に，2 重項ならその平均に比例しているとしよう。実際には，

$$g'_{\mathrm{q}} = \frac{2a-1}{2}g', \quad g'_{\mathrm{u}} = ag', \quad g'_{\mathrm{d}} = (a-1)g', \quad g'_{h} = \frac{1}{2}g' \tag{10.20}$$

となる。$U(1)$ ゲージ場を B'_μ，$SU(2)$ ゲージ場を B_μ で表すことにすれば，u, d, h 場のラグランジアン密度は，

$$\mathcal{L}_\mathrm{q} = -\sum_{i=1}^{N} \bar{q}^i_\mathrm{L} \gamma^\mu (\partial_\mu - ig'_\mathrm{q} B'_\mu - igB_\mu) q^i_\mathrm{L} \tag{10.21}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{u} = -\sum_{i=1}^{N} \bar{u}^i_\mathrm{R} \gamma^\mu (\partial_\mu - ig'_\mathrm{u} B'_\mu) u^i_\mathrm{R} \tag{10.22}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{d} = -\sum_{i=1}^{N} \bar{d}^i_\mathrm{R} \gamma^\mu (\partial_\mu - ig'_\mathrm{d} B'_\mu) d^i_\mathrm{R} \tag{10.23}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{h} = -|(\partial_\mu - ig'_\mathrm{h} B'^\mu - igB^\mu) h|^2 \tag{10.24}$$

と書ける。g は $SU(2)$ ゲージ場の結合定数である。これらに $U(1)$ ゲージ場と $SU(2)$ のゲージ場のラグランジアン密度 $(\mathcal{L}_{B'}, \mathcal{L}_B)$ を加え合せたものが，全系のラグランジアン密度 $(\mathcal{L}_\mathrm{WS})$ ということになる。

$$\mathcal{L}_\mathrm{WS} = \mathcal{L}_\mathrm{B'} + \mathcal{L}_\mathrm{B} + \mathcal{L}_\mathrm{h} + \mathcal{L}_\mathrm{q} + \mathcal{L}_\mathrm{u} + \mathcal{L}_\mathrm{d} + \mathcal{L}^\mathrm{u}_\mathrm{yuk} + \mathcal{L}^\mathrm{d}_\mathrm{yuk} + \mathcal{L}_\mathrm{h-pot} \tag{10.25}$$

ヒッグス場の自己相互作用は W 型ポテンシャルなので自発的対称性の破れが生じるはずである。するとヒッグス場の期待値は $h^*h = v^2$ となるはずであるが，h が 2 重項であることに留意すれば，それは

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{10.26}$$

となる*)。これをもとに，前の節で $h = e^{i\theta/a}(a+\rho)$ とヒッグス場を表示したように，ゲージ群の元 U を使って，

$$h = U \begin{pmatrix} 0 \\ v+\rho \end{pmatrix}, \qquad U \in SU(2) \tag{10.27}$$

と表そう。ここで $SU(2)$ 群の元 U の 3 つのパラメータは場と見なされている。ここでもゲージ変換を適当に行えば U の因子は消去できる。ゆえにヒッグス場は $U=1$ とした式 (10.27) で表される。これを式 (10.25) に代入し，ゲージ場の質量項がどのように現れているか調べてみよう。質量項は微分を含まない場の 2 次の

*)　電荷の保存を考慮して h^0 に期待値をもたせた。

項であるから，$\mathcal{L}_{\mathrm{h-pot}}$ で微分と場 ρ を無視したものである。

$$(0,\,v)\begin{pmatrix} \frac{g'}{2}B'^{\mu}+\frac{g}{2}B^{3\mu} & \frac{g}{2}(B^{1\mu}-iB^{2\mu}) \\ \frac{g}{2}(B^{1\mu}+iB^{2\mu}) & \frac{g'}{2}B'^{\mu}-\frac{g}{2}B^{3\mu} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{10.28}$$

$$= \frac{v^2}{4}[(g'B'^{\mu}-gB^{3\mu})^2+2g^2W^{*\mu}W_{\mu}] \tag{10.29}$$

ここで $W=(B^1-iB^2)/\sqrt{2}$ を導入した。また $(X^{\mu})^2$ は $X^{\mu}X_{\mu}$ の略記法である。B はトレースゼロの 2×2 の行列であるから $B=B^a\tau^a/2$ とした。式 (10.29) を見ると $B'B^3$ の項がある。これは B' と B^3 が時々刻々と相互に入れ替っている (振動している) ことを意味する。これでは粒子像がつくれないのでこのような項が現れないように B' と B^3 を混合した新しい場 A と Z を導入しよう。

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g'^2+g^2}}\begin{pmatrix} g'B'+gB^3 \\ -g'B'+gB^3 \end{pmatrix} \tag{10.30}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\mathrm{W}}) & \sin(\theta_{\mathrm{W}}) \\ -\sin(\theta_{\mathrm{W}}) & \cos(\theta_{\mathrm{W}}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B' \\ B^3 \end{pmatrix} \tag{10.31}$$

ここで $\cos(\theta_{\mathrm{W}})=g'/\sqrt{g'^2+g^2}$ であり，θ_{W} はワインバーグ角とよばれている。式 (10.29) を A, Z を使って表すと，$v^2(g'^2+g^2)Z^2/4+v^2g^2W^*W/2$ となる。実場の質量項には因子 1/2 がつくことに留意すれば，

$$\begin{aligned} {M_{\mathrm{W}}}^2 &= \frac{v^2g^2}{2} \\ {M_{\mathrm{Z}}}^2 &= \frac{(g'^2+g^2)v^2}{2} = \frac{M_{\mathrm{W}}{}'}{\cos^2\theta_{\mathrm{W}}} \\ {M_{\mathrm{A}}}^2 &= 0 \end{aligned} \tag{10.32}$$

と読める。A 場は質量ゼロで光子と解釈できる。ここでは具体的にはこれ以上検討しないが，A 場で書き直したラグランジアン密度はこの A に対するゲージ対称性は残っているのである。そして 正しく前に定義した電荷に結合している。いまの場合自発的破れは $SU(2)\otimes U(1)\to U(1)$ と破れたのである。ただし前の $U(1)$ ゲージ場は B' であったが，後の $U(1)$ ゲージ場は B' と A^3 が混合した A になっている。

次に注意してほしいことは，式 (10.25) に u や d のスピノル場の質量項がないことである。u の質量項は左右の成分を使って書けば，$\bar{u}u = \bar{u}_R u_L + \bar{u}_L u_R$ となる。これからわかるように左右の成分のゲージ変換性が違うと質量項がつくれないのである。しかし対称性の自発的破れが生じると，ゲージ場と同様にこのスピノル場にも質量項が現れる。これを見てみよう。ラグランジアン密度のヒッグス場とスピノル場が湯川相互作用をしている部分，$\mathcal{L}_{\text{yuk}}^{u/d}$ を見てほしい。$h^* = (0, v+\rho)$ なら，ρ を無視したものがスピノル場の質量項となる。$h^t\epsilon_2 q_L \simeq vu_L$，$h^* q_L \simeq vd_L$ だから，

$$\mathcal{L}_{\text{yuk}}^u \simeq vf_{ij}^u \bar{u}^i \frac{1-\gamma^5}{2}u^j + v\bar{f}_{ij}^u \bar{u}^j \frac{1+\gamma^5}{2}u^i \tag{10.33}$$

$$\mathcal{L}_{\text{yuk}}^d \simeq vf_{ij}^d \bar{d}^i \frac{1-\gamma^5}{2}d^j + v\bar{f}_{ij}^d \bar{d}^j \frac{1+\gamma^5}{2}u^i \tag{10.34}$$

となる。$\bar{f}$ は f の複素共役量である*)。

この場合もゲージボソンの場合と同様に粒子間の混合があるので，これを対角化することを考えよう。エルミートと限らない任意の行列 M を考えよう。M^*M はエルミート行列であるので，ユニタリー行列 U_1 で対角化でき，その固有値は非負である。対角化された行列を H とし，固有値がすべて非ゼロとしてみよう。すると，$\sqrt{H}$ はエルミートで，

$$U_1^* M^* M U_1 = H, \qquad \sqrt{H^{-1}}U_1^* M^* M U_1 \sqrt{H^{-1}} = 1 \tag{10.35}$$

となり，$MU_1\sqrt{H^{-1}}$ はユニタリー行列 (これを U_2 とする) であることが読みとれる。すなわち，

$$U_2^* M U_1 = \sqrt{H} \tag{10.36}$$

となる。M^*M にゼロ固有値がある場合，そのゼロ固有ベクトルの張る部分空間 V_0 と，それに直交する部分空間 $V_\perp$ は，M の不変空間となる。M の $V_\perp$ 上での作用にはゼロ固有値は現れないので，これについて上記の議論をすれば，やはり式 (10.36) が成り立つ。

---

*)　$\bar{u}_R u_L = u^*(1+\gamma^5)\gamma^4(1-\gamma^5)u/4 = u^*\gamma^4(1-\gamma^5)^2 u/4 = \bar{u}(1-\gamma^5)u/2$ を使った。また，$(\bar{u}_R^i u_L^j)^* = u^{j*}(1-\gamma^5)\gamma^4(1+\gamma^5)u^i/4 = \bar{u}^j(1+\gamma^5)^2 u^i/4 = \bar{u}^j(1+\gamma^5)u^i/2$ である。

上記の議論を使って質量項を簡単にすることを考える。$u^i = u_{\mathrm{L}}^i + u_{\mathrm{R}}^i$ であったから，2つの $N \times N$ 行列 $U_{\mathrm{L/R}}$ を使って，$U_{\mathrm{chiral}} = U_{\mathrm{L}}(1-\gamma^5)/2 + U_{\mathrm{R}}(1+\gamma^5)/2$ なるスピノルの添字をもった行列を考えよう。これを u に作用すると，

$$U_{\mathrm{chiral}} u = U_{\mathrm{L}} u_{\mathrm{L}} + U_{\mathrm{R}} u_{\mathrm{R}} \tag{10.37}$$

となる。これは左右の成分を別々のユニタリー行列で変換していることになっている。これはカイラル変換といい，$U(N)_{\mathrm{L}} \otimes U(N)_{\mathrm{R}}$ と表記される。この U_{L} と U_{R} に先ほどの U_1 と U_2 採用すれば，vf_{ij}^u を行列表示をして，$U_2^* v f U_1$ と変換される。ゆえに対角化できて，$vf_{ij}^u \to m_i^u \delta_{ij}$ となる。これを式 (10.33) と式 (10.34) に代入すれば (d に同じ手続きをして),

$$vf_{ij}^u \bar{u}^i \frac{1-\gamma^5}{2} u^j + v\bar{f}_{ij}^u \bar{u}^i \frac{1+\gamma^5}{2} u^j \to m_i^u \bar{u}^i u^i \tag{10.38}$$

$$vf_{ij}^d \bar{d}^i \frac{1-\gamma^5}{2} d^j + v\bar{f}_{ij}^d \bar{d}^i \frac{1+\gamma^5}{2} d^j \to m_i^d \bar{d}^i d^i \tag{10.39}$$

となり，再定義された u^i 場の質量は m_i^u となる。このカイラル変換がほかのラグランジアン密度の部分に及ぼす影響は，ゲージ場がスピノル場と相互作用している部分のみであるが，これの分析は後の章で行う。

第11章 強い相互作用，QCD理論

11.1 クォークとQCD

坂田模型の提唱後4年目に小川修三はpとnのユニタリー対称性 ($SU(2)$) であるアイソスピンの概念を p, n, Λ 間の対称性に拡張し，$U(3)$ 対称性を導入した。この理論は池田峰夫と大貫義郎の協力を得て発展させられたので，IOO 対称性ともよばれる。またスイスにいた山口嘉夫も独立にこの理論に到達していた。これらを武器に坂田モデルは分析されたが，メソン族に対しては大きな成功を収めたにもかかわらず，バリオン属では，Σ, Ξ を，p, n, Λ と異なる階層の粒子，すなわち後者が基本粒子で前者がそれらからつくられた複合粒子であるとしていた坂田モデルでは十分な成功を収められなかった。

前に説明したようにメソン族，$\pi^{\pm,0}$, $\mathrm{K}^{+,0}$, $\bar{\mathrm{K}}^{0,-}$, η は8重項をなしていた。以下では $U(3)$ (および $SU(3)$) 多重項はアイソスピンのそれと区別するために，太字で表すことにする。群論的な言葉では，基本粒子の3重項 $\mathbf{3}$ とその反粒子 $\bar{\mathbf{3}}$ からつくられる9個の状態が群論的性質の等しい組，8重項と1重項に分れる ($\mathbf{3}\times\bar{\mathbf{3}}=\mathbf{8}+\mathbf{1}$)。この8重項にメソンは割り当てられた。この説明をした際に，バリオンも荷電状態で見れば同じく8重項をつくっていると指摘しておいた (表7.2)。ゲルマンはこの事実を重視してメソンやバリオンが何からつくられているかは忘れることにして，8重項にバリオンも割り当てることを提唱し，この説を

表 11.1　クォーク

q(クォーク)	u	d	s
バリオン数	1/3	1/3	1/3
アイソスピン I_3	1/2	−1/2	0
電荷	2/3	−1/3	−1/3
奇妙さ	0	0	1

八道説と名づけた*)(1962 年)。

この八道説の成功の後 1964 年にゲルマンとツヴァイク (G.Zweig) は独立してクォーク模型を提案した。クォークは坂田模型の p, n, Λ からバリオン数 2/3 を減じ，また電荷も 1/3 減じたものになっている。クォーク 3 個からバリオン数 1 の状態をつくることになるので，クォークのバリオン数は 1/3 としてある。

8 重項の電荷は，メソンもバリオンもアイソスピンの第 3 成分 I_3 と，ハイパーチャージ $Y = S + N_{\rm B}$ (S : 奇妙さ，$N_{\rm B}$: バリオン数) を使って，$Q = I_3 + (Y/2)$ と表される，と第 7 章で説明した。多体系の I_3 や Y は加法的であるから，クォークのレベルでこの関係が成り立っていて，クォークの束縛系が正しくアイソスピンや奇妙さを再現していれば，電荷も正しく再現していることがわかる。表 11.1 を見ればこの関係が成立していることがわかる。

クォークを総称するときは q と書くことにする。u,d はアイソスピンの up と down からきている。このアイソスピン 1/2 の部分をまとめて表すときは，核子の "N" に対応しているとの意味で，$\rm q_N$ と記そう。また s は奇妙さ数をもっているので，strangeness の s から来ていている。では，このクォークからバリオンをどのようにつくるのであろうか。

これを説明するには多少群論の知識がいるので，それを必要最小限の程度説明しよう。まずメソンについては，クォークと反クォークの 2 体状態 $f_i^j|q^i\bar{q}_j\rangle$ を考える。f_i^j のトレースがゼロの部分と δ_i^j に比例する部分は $SU(3)$ 変換のもとで混じ

*)　$U(3)$ は行列全体にかかる位相因子と行列式が 1 の行列に分解できるので，$U(3) = U(1) \otimes SU(3)$ と書ける。この $U(1)$ に対応するカレントは，坂田模型では，バリオン数カレントが対応していた。八道説では背後に模型がないので，この $U(1)$ の意味がはっきりしないことから，八道説では $SU(3)$ のみが使われ，八道説は $SU(3)$ 理論ともよばれた。八道説の名の由来はインド哲学からきている。

り合わないので $\bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} + \mathbf{1}$ と分解され，8 重項はこのトレースレス部分であると説明した。ここで，クォークのみで，反クォークを使わずに 8 重項をつくることを考えてみよう。それには $\bar{\mathbf{3}}$ と同じ群論的性質，すなわち $\bar{\mathbf{3}}$ の変換性をもった 3 重項を見つけてくればよい。$\bar{\mathbf{3}}$ を特徴づけるものは，$\mathbf{3}$ の添字と縮約したとき不変になることである ($q^i \bar{q}_i =$ 不変)。3 階反対称テンソル ϵ_{ijk} は $g \in SU(3)$ $(\det(g) = 1)$ に対して不変であることに留意しよう。

$$\epsilon_{i'j'k'} g_i^{i'} g_j^{j'} g_k^{k'} = \det(g) \epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijk} \tag{11.1}$$

ということはクォーク 2 体の反対称状態 $\epsilon_{ijk}|q^j q^k\rangle$ は，反クォーク $\bar{\mathbf{3}}$ と同じ変換性をもっているということである。ゆえに，8 重項はトレースレス f_i^j を使って，

$$f_i^j \epsilon_{jkl} |q^i q^j q^l\rangle \tag{11.2}$$

と表される。

次に，これが正しくアイソスピン多重項と奇妙さを与えているか調べてみよう。クォークの $SU(3)$ 3 重項はアイソスピン多重項で見れば，アイソスピン 1/2 の 2 重項 (2) とアイソスピン 0 の 1 重項 (1) である。すなわち，$\mathbf{3} = 2 + 1$ である。$\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ の反対称状態は 3 自由度であるが，アイソスピン多重項で見れば，2×2 の反対称状態は 1 重項でアイソスピンは 0 である。またこの状態は u, d のみからできているので，奇妙さはゼロである。2×1 の反対称状態はアイソスピンの 2 重項で，アイソスピン 1/2 である。この 1 は s クォークのことなので，奇妙さは -1 である。1×1 からは反対称状態はつくれない。

以上のことをまとめると，クォーク 2 体の反対称状態 (antisymmetric) にラベル A をつけて表すことにすれば，$(\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathrm{A}} = 2_{\mathrm{A}} + 1_{\mathrm{A}}$ で，2_{A} はアイソスピン 1/2，奇妙さ -1 であり，1_{A} はアイソスピンがゼロで奇妙さもゼロである。すると，クォークの 3 体状態 $\mathbf{3} \times (\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathrm{A}}$ は，

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \times (\mathbf{3} \times \mathbf{3})_{\mathrm{A}} &= (2 + 1) \times (2_{\mathrm{A}} + 1_{\mathrm{A}}) \\ &= 2 \times 2_{\mathrm{A}} + 2 \times 1_{\mathrm{A}} + 1 \times 2_{\mathrm{A}} + 1 \times 1_{\mathrm{A}} \end{aligned} \tag{11.3}$$

となる。アイソスピンの 2 重項と 2 重項の結合状態はアイソスピン 3 重項と 1 重項からなることは，第 7 章のフェルミ–ヤン模型の紹介のところで説明した。これ

を $2\times 2_{\rm A}=3_{2\times 2_{\rm A}}+1_{2\times 2_{\rm A}}$ と書くことにしよう。これらの奇妙さは 2 が 0 で，$2_{\rm A}$ が 1 であったから，全体として -1 である。アイソスピンと奇妙さからみると，$2\times 1_{\rm A}$ が N，$1\times 2_{\rm A}$ が Ξ，$3_{2\times 2_{\rm A}}$ は Σ となる。アイソスピン 0 のものが 2 つあるが，このうちの 1 自由度は $SU(3)$ の 1 重項であるから，8 重項のアイソスピンがゼロのものは，$1_{2\times 2_{\rm A}}$ と $1\times 1_{\rm A}$ をある比重で重ね合せたものであり，これが Λ である。たしかにアイソスピン多重項と奇妙さはバリオン 8 重項を再現している。ゆえに，前に指摘したように電荷も再現できている。

以上のことをもう少し視覚的に見やすいように式で書けば，

$$\begin{aligned}
&|{\rm N}^a\rangle = |q^a_{\rm N}(ud-du)\rangle \\
&|\Sigma^i\rangle = (\epsilon_2\tau^i)_{ab}|q^a_{\rm N}(q^b_{\rm N}s-sq^b_{\rm N})\rangle \\
&|\Lambda\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\epsilon_2)_{ab}|q^a_{\rm N}(q^b_{\rm N}s-sq^b_{\rm N})\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}(\epsilon_2)_{ab}|s(q^a_{\rm N}q^b_{\rm N})\rangle \\
&|\Xi^a\rangle = |s(q^a_{\rm N}s-sq^a_{\rm N})\rangle
\end{aligned} \tag{11.4}$$

となる。$a,b=1,2$ で $i=1,2,3$ である。また，$q^1_{\rm N}=u$，$q^2_{\rm N}=d$。そして，$|q^a_{\rm N}(ud-du)\rangle$ は $|q^a_{\rm N}ud\rangle-|q^a_{\rm N}du\rangle$ の略記法である*)。

クォーク模型を不動のものにしたものは，非相対論的 $SU(6)$ 理論 (ギュルゼイ (F.Gürsey)–ラデカッティー (L.A.Radicati)，崎田文治) である。相対論ではスピンと軌道角運動量は結合していて，それぞれ単独では保存しない。そこで非相対論的近似をして，スピン単独で保存するとしよう。ここで u, d, s の自由度を，慣例にならってユニタリースピンの自由度をよぶことにして，このユニタリースピン ($i=1,2,3$) とスピン ($a=1,2$) の自由度を組 (ia) にした 6 自由度の状態間のユニタリー対称性 $SU(6)$ を考えるのである。q^{ia} の 3 体の状態は 6^3 自由度あるが，このうち完全対称な状態は $56(={}_6{\rm H}_3)$ 自由度である。これをユニタリースピン u とスピン s の状態に注目して調べてみると，56 自由度のうち 40 自由度は，ユニタリースピンとスピンの状態が独立に対称になっている状態から構成されている。すなわち，$f_{i_1a_1i_2a_2i_3a_3}|q^{i_1a_1}q^{i_2a_2}q^{i_3a_3}\rangle$ で $f_{i_1a_1i_2a_2i_3a_3}=u_{(i_1i_2i_3)}s_{(a_1a_2a_3)}$ となっている部分である。ここで添字が (と) でくくってあるものは，それらの入れ換えに対して対称になっていることを示す。

*)　$|q_1q_2q_3\rangle$ では，q_i それぞれについて座標やスピンの自由度が省略された記法が用いられているので，クォークの種類を表す変数のみ入れ換えると，まったく別の状態になってしまう。

表 11.2　10 重項 ($N_B = 1$, スピン $= 3/2$)

I_3	3/2	1	1/2	0	−1/2	−1	−3/2	質量 [MeV]
$S = -3$				Ω^-				1670
$S = -2$			Ξ^{*0}		Ξ^{*-}			1530
$S = -1$		Σ^{*+}		Σ^{*0}		Σ^{*-}		1385
$S = 0$	Δ^{++}		Δ^+		Δ^0		Δ^-	1230

これは，u が 10 自由度 ($= {}_3H_3$) あり，s は 4 自由度 ($= {}_2H_3$) である。スピンの 4 重項は，スピンの大きさが 3/2 の状態である。以下では添字について $[i_2 i_3]$ となっていれば $i_2 i_3$ について反対称化がされているものとする。$u_{i_1[i_2 i_3]}$から完全反対称部分を差し引いた 8 自由度を $u'_{i_1[i_2 i_3]}$ と書くことにして，スピン部分の 2 自由度の $s_{a_1[a_2 a_3]}$ との積 $u'_{i_1[i_2 i_3]} s_{a_1[a_2 a_3]}$ を考えると**)，残りの 16 自由度はこれを $(i_1 a_1)$, $(i_2 a_2)$, $(i_3 a_3)$ の組について完全対称化した状態から構成されていた。スピンの 2 重項はスピンの大きさが 1/2 の状態である。まとめると，$SU(6)$ の 56 重項はスピン 3/2 の $SU(3)$ 10 重項とスピン 1/2 の $SU(3)$ 8 重項からなっていた。後者は陽子や中性子を含む 8 重項であったが，10 重項を構成している Δ, Σ^*, Ξ^* は，すでにこのとき加速器実験で発見されていた (表 11.2)。

表を見ればわかるように，それらの質量は等しくないので，完全に $SU(6)$ 対称性が成り立っているわけではない。これは u, d クォークに比べ s が少し重い等の特殊事情があるためである。この効果を摂動的に取り入れると，$SU(6)$ 56 多重項の粒子の質量等の物理量に，いくつかの関係式を導くことができる。これらの関係式は，このような荒い近似ではあるが，たいへんよく成り立った。これらの関係式のうち最大の成功は，この時点で未発見であった Ω^- 粒子の質量の予言であった。これは 1965 年に予言通りの質量で発見された。この $SU(6)$ の大きな成功にもかかわらず，この理論には大きななぞがあった。クォークはフェルミ粒子であるから，その状態は完全反対称でなければならない。ユニタリースピンとスピン部分が完全対称であるとすると，空間座標部分が完全反対称でなければならない。これは前の章で述べたように量子力学の基底状態はノード (ゼロ点) がない，

**)　a は 1, 2 を走るので 3 粒子の完全反対称状態はつくれない。

という定理と矛盾する。

これをクォークの神秘性のせいにして無視する人も多かったが，グリンバーグ (O.W.Greenberg) とハン (M.Y.Han) –南部はクォークには未発見の自由度があり，その自由度が反対称性を担っていると考えた。グリンバーグは，彼が以前から強い関心をもっていたパラ統計*)がそれを担うとした。一方，ハン–南部はクォークが 3 重になっているとした。すなわち u クォークについても 3 種類の u^α $(\alpha = 1, 2, 3)$ があるとした。彼らの動機は，クォークの電荷が分数になっているのを嫌い，$\alpha = 1, 2$ のクォークに電荷 1/3 を加え，$\alpha = 3$ のクォークに電荷 $-2/3$ を加えた。これですべてのクォークの電荷は整数になったし，この操作は平均するとゼロになるので，これらからつくられたバリオンの電荷の状態は前の議論と変らない。

しかし，今日ではクォークの電荷は α によらず同じであると考えている。それは，この α の自由度がゲージ変換を受ける自由度である，と考えているからである**)。クォークの種類 u, d, $\cdots$ を表す自由度を i で表し，ハン–南部の自由度を α として，クォーク場を $q^{i\alpha}$ で表したとき，ゲージ変換を，

$$q^{i\alpha}(x) = g(x)^{\alpha}_{\beta} q^{i\beta}(x), \qquad g(x) \in SU(3) \tag{11.5}$$

で決める。このゲージ変換より決まる理論を量子色力学 (QCD;Quantum ChromoDynamics) とよんでいる。ハン–南部の自由度を色の自由度とよぶが，これは何もクォークに色がついているわけではない。フランスの片田舎で若手研究者向けに行われた冬の学校の講義 (1969 年) で，ゲルマンが冗談にこの自由度を色の自由度とよび，フランスの国旗の色，青白赤を当てた。ハン–南部の自由度に名前がなかったので，これは便利だということで広まった。しかし，色なら光の 3 原色の方が自然である。そして，後で述べるクォークの閉じ込め (単独のクォークは存在できない) の事実を，白色の状態のみが存在を許される，と簡素に述べることができるので，これが定着した。

---

*)　フェルミ統計を拡張して，対称状態に a 個まで入れるものを，オーダー a のパラ・フェルミ統計といった。ここでは $a = 3$ とされた。

**)　この $SU(3)$ ゲージ変換は電荷を変えないので，クォークにハン–南部のような電荷をとると $SU(3)$ が作用できない。

11.2　カイラル対称性の自発的破れ

前章の電弱統一理論の紹介で，クォークやレプトンの質量は，電弱統一理論に現れる，電弱 $SU(2)$ ゲージの 2 重項であるヒッグス粒子により引き起こされるヒッグス機構で生じると説明した。しかし，u, d クォークについてはこれは少々荒い議論である。この章では QCD によるカイラル $SU(2) \otimes SU(2)$ の自発的破れの現象を紹介しよう。この話は，いままでの流れからすると第 9 章で紹介したゲルマン–レビの話の続きから入るのが便利である。

クォーク模型提唱以前の話なので，核子をベースに話をしよう。この核子のカイラル変換を考えよう。すなわち，N を左右成分に分け，それぞれ独立に $SU(2)_{\mathrm{L}}$ と $SU(2)_{\mathrm{R}}$ で変換するのである。この変換に対応するカレントは第 5 章と第 10 章で議論したことを思い出せば，

$$J_{\mathrm{R}}^{\alpha\mu} = i\bar{N}\gamma^{\mu}\frac{(1+\gamma^5)}{2}\tau^{\alpha}N, \quad J_{\mathrm{L}}^{\alpha\mu} = i\bar{N}\gamma^{\mu}\frac{(1-\gamma^5)}{2}\tau^{\alpha}N \tag{11.6}$$

であることがわかる。$J^{\alpha\mu} = J_{\mathrm{R}}^{\alpha\mu} + J_{\mathrm{L}}^{\alpha\mu}$ がベクトルカレントで，$J_5^{\alpha\mu} = J_{\mathrm{R}}^{\alpha\mu} - J_{\mathrm{L}}^{\alpha\mu}$ が軸性ベクトルカレントである。ここで α はパウリの τ 行列の添字であるから 1, 2, 3 を走る。$J^{\alpha\mu}$ はアイソスピンカレントであり，アイソスピン対称性がよい対称性であるので，保存している $(\partial_{\mu}J^{\alpha\mu} = 0)$。ゲルマンとレビは，弱い相互作用のカレント–カレント有効理論で，ベクトルカレントの係数がほぼ 1 であるのに比して，軸性ベクトルカレントの核子部分の係数 (g_{A} 因子という) が 1.2 となっているのは，強い相互作用で軸性ベクトルカレントが保存しておらず，強い相互作用のくり込みの効果である，と結論した (第 9 章)。

そして軸性ベクトルカレント $J_5^{\alpha\mu}$ の発散 $\partial_{\mu}J_5^{\alpha\mu}$ は非ゼロであるが，その値は何になるかを議論し，これはアイソスピン 3 重項の擬スカラー量であるから，π^{α} 場に比例するとし，これを PCAC(Partially Conserved Axial-vector Current) とよんだ。

$$\partial_{\mu}J_5^{\alpha\mu} = c\pi^{\alpha} \tag{11.7}$$

1960 年代の中ごろの数年間にわたり，この PCAC と π 粒子の質量がほかのハドロンに比べ軽いという性質を使って，ハドロン現象の分析が盛んになされた。そして多くの成果を上げたが，1960 年代の後半になると，この荒い近似がなぜこの

ようによく合うのか，の反省期に入った。そして得られた結論は，ゲルマン–レビが主張したように軸性ベクトルカレントは “partially conserved” ではなく，近似的によく保存しており，カイラル対称性は近似的によく成り立っていて，π 粒子が近似的に南部–ゴールドストン粒子と見なせることの結果であることがわかってきた。ゼロ質量粒子があり，それが結合するカレントが保存すると，それに対応する低エネルギー定理が導けるが，結果的にカイラル対称性についての低エネルギー定理を導いていたのである。

この低エネルギー定理をカイラル対称性の場合に説明するページ数の余裕がないので，歴史的に最初に発見された QED の場合について説明しよう。図 11.1 を見てほしい。荷電粒子が光子と相互作用をしていれば，荷電粒子は光子を放出し，その光子が粒子・反粒子対に転換するような過程 (真空分極) もあるであろう。このような状況下にある荷電粒子が，外部から来た長波長の光子と相互作用をすることを考えてみよう。波長より細かい電荷分布は識別できないから，波長内の電荷の総和を感じることになる。すると，電荷が保存していれば，真空分極の状況によらず初めの荷電粒子の電荷を感じていることになる。電子と光子の散乱であるコンプトン散乱の断面積を $\sigma_{e\gamma}(\boldsymbol{k})$ とする。ここで $\boldsymbol{k}$ は入射光子の運動量である。すると低エネルギー定理では $\sigma_{e\gamma}(\boldsymbol{k}) = 8\pi e^2/3{m_e}^2c^2 + O(k)$ と表される。初項はトムソン断面積である。そして，e^4 以上の寄与は k がゼロになるとなくなると主張している。これに相当する定理が，カイラル対称性の場合にも導けたのである。

カイラル対称性の自発的破れ現象の特徴をモデルラグランジアンを使って説明しよう。まず，アイソスピン 1 重項の実スカラー場 σ と，アイソスピン 3 重項の擬スカラー場 π^α を用意しよう。これをまとめて $M = \sigma\mathbf{1}_2 + i\pi$ $(\pi = \tau^\alpha\pi^\alpha)$ と 2 行 2 列の行列表示をしよう。カイラル変換を $M' = g_L M g_R^*$ $(g_L \in SU(2)_L,\ g_R \in SU(2)_R)$ とする。カイラル変換不変なラグランジアン密度として次のものを採用する。

$$\mathcal{L}_{\rm boson} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\partial^\mu M^* \partial_\mu M - \lambda \mathrm{Tr}\,(M^*M - 2v^2)^2 \tag{11.8}$$

カイラル微小変換 $\delta M = (i\epsilon_L^\alpha\tau^\alpha/2)M - M(i\epsilon_R^\alpha\tau^\alpha/2)$ を考え，$\epsilon_R = -\epsilon_L = \epsilon_5$ の場合のカレントを求めてみよう。

$$J_5^{\alpha\mu} = -\frac{\partial\mathcal{L}_{\rm boson}}{\partial\partial_\mu\epsilon_5^\alpha}$$

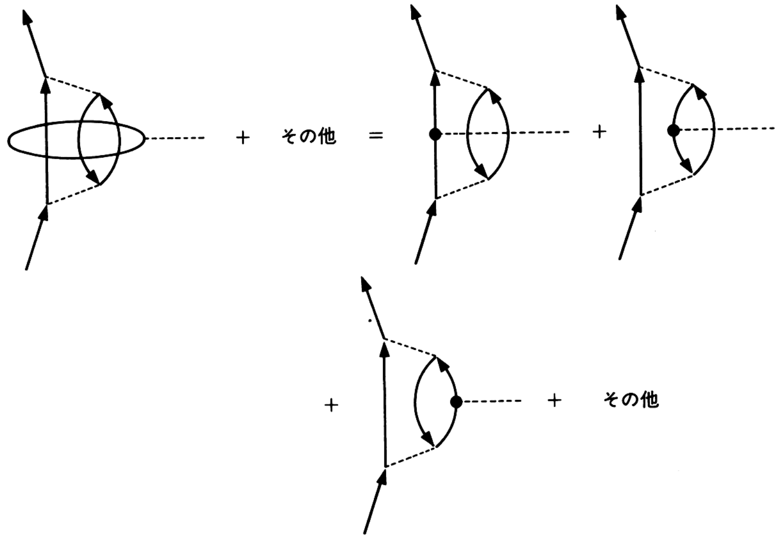


図 11.1 カレントの保存と低エネルギー定理。長波長の光子の感じる電荷は波長内の電荷の総和であるから，カレントが保存していれば，相互作用があっても変らない。

$$= \frac{i}{8}(\{M^*, \partial^\mu M\}^\alpha - \{\partial^\mu M^*, M\}^\alpha) \tag{11.9}$$

$$= \sigma\partial^\mu\pi^\alpha - \pi^\alpha\partial^\mu\sigma \tag{11.10}$$

ここで $\{A, B\}^\alpha$ は A と B のプラス型交換関係をとり，その結果を $\mathbf{1}_2$ と τ^α を使って展開し，それの τ^α の係数を指している。

M のポテンシャルは W 型なので，M は真空期待値をもつ。アイソスピン対称性は壊さないように期待値をもたせるとすれば，$\sigma = v$ である。そこで $\sigma = v + \sigma'$ として，この σ' と π で $\mathcal{L}_{\text{boson}}$ を書き直してみれば，π の質量がゼロになっているのは前の章と同じである。

ここで，この系をカイラル対称に核子の系と結合させてみよう。核子場 N は N_{R} と N_{L} に分解し，それぞれ $SU(2)_{\text{R}}$ と $SU(2)_{\text{L}}$ で変換することにすれば，核子の質量項は存在しないが，M が $(2_{\text{L}}, 2^*_{\text{R}})$ の変換性をもつので，湯川相互作

用 $\bar{N}_{\rm L}MN_{\rm R}$ は可能である。また微分をもった相互作用も考えることにすれば，$\bar{N}_{\rm L}\gamma^\mu\partial_\mu MM^*N_{\rm L}$ も許される*)。これをまとめると，

$$\mathcal{L}_{\rm N} = -\bar{N}_{\rm L}\gamma^\mu\partial_\mu N_{\rm L} - \bar{N}_{\rm R}\gamma^\mu\partial_\mu N_{\rm R} - f\bar{N}_{\rm L}MN_{\rm R} + \text{h.c.}$$
$$-g\bar{N}_{\rm L}\gamma^\mu(\partial_\mu MM^*)_a N_{\rm L} - g\bar{N}_{\rm R}\gamma^\mu(\partial_\mu M^*M)_a N_{\rm R} \tag{11.11}$$

となる。$\mathcal{L}_{\rm N}$ のベクトルカレントと軸性ベクトルカレントを求めてみる。カレントの定義は $\partial\mathcal{L}/\partial\partial_\mu\epsilon$ の形をしていたことに注意すれば，微分を含む項からはすべて寄与があることに注意して，

$$J_{\rm N}^{\alpha\mu} = \bar{N}_{\rm L}\gamma^\mu\frac{i}{2}\tau^\alpha N_{\rm L} + \bar{N}_{\rm R}\gamma^\mu\frac{i}{2}\tau^\alpha N_{\rm R}$$
$$+g\bar{N}_{\rm L}\gamma^\mu\frac{i}{4}\{M[\tau^\alpha, M^*] - [\tau^\alpha, M^*]M\}N_{\rm L}$$
$$+g\bar{N}_{\rm R}\gamma^\mu\frac{i}{4}\{M^*[\tau^\alpha, M] - [\tau^\alpha, M]M^*\}N_{\rm R} \tag{11.12}$$
$$= \frac{i}{2}\bar{N}\gamma^\mu\tau^\alpha N + \cdots \tag{11.13}$$

$$J_{\rm N5}^{\alpha\mu} = -\bar{N}_{\rm L}\gamma^\mu\frac{i}{2}\tau^\alpha N_{\rm L} + \bar{N}_{\rm R}\gamma^\mu\frac{i}{2}\tau^\alpha N_{\rm R}$$
$$-g\bar{N}_{\rm L}\gamma^\mu\frac{i}{4}\{M\{\tau^\alpha, M^*\} + \{\tau^\alpha, M\}M^*\}N_{\rm L}$$
$$+g\bar{N}_{\rm R}\gamma^\mu\frac{i}{4}\{M^*\{\tau^\alpha, M\} + \{\tau^\alpha, M^*\}M\}N_{\rm R} \tag{11.14}$$
$$= \frac{i}{2}\bar{N}\gamma^\mu\gamma^5\tau^\alpha N + \cdots \tag{11.15}$$

となっている。全体のカレントは，これに $\mathcal{L}_{\rm boson}$ からの寄与が加わる。

これらのモデルラグランジアンから特徴を引き出そう。カイラル対称性の自発的破れにより，σ は期待値 v をもつ。いま，場の 2 次までの項に注目するので，$M \simeq v$ としてよい。これを式 (11.11) に代入し，核子の質量 ($\bar{N}N$ の係数) を見れば，$M_{\rm N} = fv$ である。核子のみが寄与しているカレントを見てみよう。ベクトルカレントは式 (11.12) で，$(i/2)\bar{N}\gamma^\mu\tau^\alpha N$ で，v に依存しない。軸性ベクトルカレントは式 (11.14) より，$(i/2)(1+2gv^2)\bar{N}\gamma^\mu\gamma^5\tau^\alpha N$ と読め，$g_{\rm A}$ 因子は $1+2gv^2$ である。自発的対称性の破れが生じていないとき ($v=0$) はたしかに 1 である。

*)　$\bar{N}_{\rm L}\gamma^\mu\cdots N_{\rm L} = N_{\rm L}\gamma^4\gamma^\mu\cdots N_{\rm L}$ は γ 行列が 2 つあるのでゼロにはならない。またこの項がエルミートであるためには，$\partial^\mu MM^*$ は反エルミート化し，$(\partial^\mu MM^*)_a = (\partial^\mu MM^* - M\partial^\mu M^*)/2$ としておく必要がある。

次に核子と π 粒子の結合定数であるが，いまの場合自発的対称性の破れが生じると，式 (11.11) で微分のかかっていない M を $M=v$ としてみればわかるように，$gv\bar{N}\gamma^{\mu}\gamma^{5}(i\partial^{\mu}\pi/2)N$ の項が生じる。低エネルギーではこれは $2M_{\rm N}gv\bar{N}\gamma^{5}(\pi/2)N$ に等しいことが知られているので*)，$f_{\pi\rm N}=f(1+2v^{2}g)$ となる。次にボソンからの軸性ベクトルカレントの部分を見てみよう (式 (11.10))。$v\partial^{\mu}\pi^{\alpha}$ の項がある。$\partial^{\mu}\pi$ の係数は，パイオン崩壊係数 f_{π} とよばれているものである。弱い相互作用のカレント–カレント型理論を思い出せばわかるように，過程 $\pi^{-}\to\mu+\bar{\nu}_{\mu}$ の振幅そのものであるからである。これで $f_{\pi}=v$ と読めた。すると，

$$M_{\rm N}g_{\rm A}=f_{\pi}f_{\pi N} \tag{11.16}$$

の関係があることに気づく**)。これは ゴールドバーガー (M.L.Goldberger)–トライマン (S.B.Treiman) 関係とよばれる式で，たいへんよく成り立っている。これはたまたまこのモデルラグランジアンで成り立っていたのではなく，前に述べたカイラル対称性の低エネルギー定理として導ける式の 1 つなのである。

これ以外の低エネルギー定理の結果もよく成り立っている。このことはカイラル対称性が自発的破れという現象を伴っているが，よく成り立っていることを示している。しかし，π 粒子が完全にゼロ質量でないことからもわかるように，カイラル対称性は明白に破れている。これがどのぐらいかみてみよう。

σ はアイソスピンゼロなので，

$$\mathcal{L}_{\rm c\cdot s\cdot b}=\frac{\kappa}{2}{\rm Tr}\,M=\kappa\sigma \tag{11.17}$$

のラグランジアン密度を $\mathcal{L}_{\rm boson}+\mathcal{L}_{\rm N}$ に加えてみよう。この項は，アイソスピン対称性は破らないが，カイラル対称性は破っている。この項を加えたことにより，ポテンシャルの最小点 $\sigma_{0}=v$ は，$\sigma_{0}'=v+\kappa\lambda/8v^{2}$ にずれる (κ が小さいとして κ の 1 次まで計算した) 。改めて $\sigma=\sigma_{0}'+\sigma'$ を $\mathcal{L}_{\rm boson}+\mathcal{L}_{\rm c\cdot s\cdot d}$ に代入して，π^{2} の項を調べてみると，今度はゼロでなく ${m_{\pi}}^{2}=\lambda^{2}\kappa/2v$ となっている。あからさまにカイラル対称性が破れたために，南部–ゴールドストン粒子に質量が現れ

---

*)　運動量 p の核子が，運動量 $p'-p$ の π を吸収して運動量 p' の核子になったとする。すると $i\bar{N}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\partial_{\mu}\pi N=\bar{N}\gamma^{\mu}(p-p')_{\mu}\gamma^{5}\pi N$ である。また，このとき核子は自由粒子と考えてよいので，ディラック方程式を使えば，これは $2M_{\rm N}\bar{N}\gamma^{5}\pi N$ となる。

**)　$g_{\rm A}$ 因子が 1 からずれていたのは，ゲルマン–レビがいうように PCAC のせいではなく，カイラル対称性はよい対称性であったが，自発的に破れていた結果であった。

たわけである。南部–ゴールドストン粒子の質量の 2 乗が破れ κ の 1 乗に比例することは，このモデルだけの特徴ではなく，一般的にいえることである。

ここで，u, d クォークに限定して QCD を考えよう。

$$\mathcal{L}_{\rm QCD} = -\bar{q}_{i\alpha}\gamma^{\mu}[\partial_{\mu}\delta^{\alpha}_{\beta} - ig(B_{\mu})^{\alpha}_{\beta}]q^{i\beta} - \bar{q}_{i\alpha}m_i\delta^i_j q^{j\alpha} + \mathcal{L}_{\rm gauge} \tag{11.18}$$

i は u, d を走る。ここで，$m_i = 0$ とすれば，このラグランジアン密度はカイラル不変であり，クォークの質量項がカイラル対称性の明白な破れの項である。この質量項は電弱統一理論 (WS) 起源の質量項と考えている。いままでの分析からすると，これは小さいはずである。南部–ゴールドストン粒子である π の質量の 2 乗は，この $m_{\rm WS}$ ($\simeq m_{\rm u}, m_{\rm d}$) に比例，つまり $m_{\pi}{}^2 = m_{\rm WS}\Lambda$ となっているはずである。ここに Λ は質量の次元をもった量である。それは強い相互作用を特徴づけている量なので，陽子の質量 1 GeV くらいのオーダーとみてよい。π 粒子の質量は 0.14 GeV である。すると $m_{\rm WS}$ は 0.01 GeV くらいの量ということになる。強い相互作用の特徴的な大きさ 1 GeV に比べ十分に小さく，カイラル対称性が近似的によく成り立っていることがわかる。

これはたいへん粗い推定であるが，きちんと評価すると，$m_{\rm u} \simeq 0.004$ GeV と $m_{\rm d} \simeq 0.007$ GeV が得られている。このような u, d クォーク 3 個から陽子や中性子はつくられているので，核子の質量は QCD のカイラル対称性の自発的破れ起源と考えられる (QCD 効果まで含めた u, d の有効質量は 0.3 GeV くらいである)。s クォークについては，電弱起源と QCD 起源の質量は同じオーダーであり，後で登場する c, b, t クォークの質量の主要部分は電弱起源である。

この核子の質量が強い相互作用起源であるとする説は，最初に南部–ジョナ・ラジニオ (G.Jona-Lasinio) によって指摘された (1960 年)。彼らのモデルは核子のみの系で，それらが自己相互作用をしているモデルであり，σ の代りに $\bar{N}N$ に真空期待値をもたせることで，カイラル対称性を自発的に破っていた。QCD でも同じで，$\bar{q}q$ が真空期待値をもち，カイラル対称性が破れている。

11.3　QCD 理論とクォークの閉じ込め

クォークモデルが提唱されるや，それに基づいた分析が行われ大きな成功を収めていったが，それに伴いミステリアスなクォークの性質も次々と浮び上がってきた。非相対論的な近似に基づいたモデルが成功し，低いエネルギーの電磁相互作用で見ると，クォークは比較的軽く，ハドロン内で自由に運動しているように見え，非相対論的クォーク模型がよくあった。

しかし，一方，高いエネルギーで陽子と陽子の衝突をさせてみても，陽子の構成要素であるクォークは飛び出してこない。これを，クォークをつくるにはエネルギーが不足しているとして説明しようとすると，クォークは陽子の 10 倍以上の質量をもたねばならないとの結論になった。とすると，10 GeV 以上の質量のクォーク 3 個から陽子をつくるにはクォーク 3 個分の静止質量エネルギーを 1 GeV の陽子の質量にするほどのものすごい引力が必要になる。クォークの静止質量をほぼ打ち消すほどの巨大な“力”のもとでは非相対論的近似は許されない。それは相対論的世界であり，クォークの生成消滅が頻繁に起こっていると推測される。しかし，そうすると，なにゆえこの相対論的効果を無視した近似が成功したのかが理解できない。

また，ハドロンとハドロンを比較的高いエネルギーで衝突させてみると，ハドロン内のクォークは互いにひもで結ばれているように見え，そのひもの自由度の効果も観測されたが，高エネルギーでのクォークは何ものにも束縛されずに自由であるように見えた。この事実は漸近自由性とよばれた。

このように見る現象によって極端に違った姿をクォークは見せていた。これは今日の知見からすれば，QCD は白色の状態しか許さず*)，単独のクォークのような色をもった状態は存在しえないという“カラー閉じ込め”，または，“クォーク閉じ込め”とよばれる想像を絶した機構を知らなかったためである。このことがクォークを神秘的に見せ，クォークの提唱者ゲルマンをして，クォークは実在ではなく機能であり，計算をしたら後は忘れたらよい，といわしめたほどで

*)　色の自由度に光の 3 原色，赤緑青を当てると，色 $SU(3)$ 1 重項は白色になる。メソンやバリオンのクォーク・反クォーク系やクォーク 3 体系ではこれで問題はないが，一般の多重項の中には白色の状態もあるので，この表現はあまり正確ではない。正確には色 $SU(3)$ 1 重項しか許されない，というべきである。

ある。

ほんの一部の人を除いて，当時指導的立場にあった国内外のほとんどすべての人たちが場の理論に対する不信感をあおり，場の理論を越えた革命的な新理論の出現を待望する神秘主義を蔓延させたが，その背景にはクォークのこのような性質も一役買っていた。

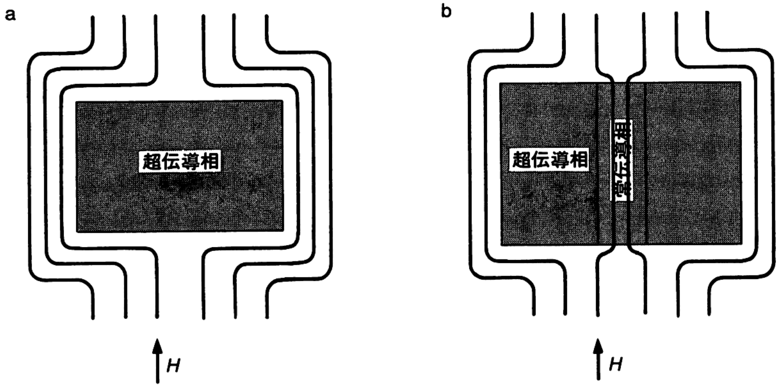


図 11.2　超伝導体の反磁性。(a) マイスナー効果。(b) 磁場が強くなると、第 2 種超伝導体では磁場が糸状に進入する。

では今日クォークの閉じ込めはどのように理解されているのであろうか。これの理解には超伝導物質の示すマイスナー効果が参考になる。

超伝導状態にある金属に磁場をかけたとしよう。このとき作用と反作用の原理で，金属内の電子はその磁場を打ち消すように運動する。これを反磁性電流という。しかし，常伝導の金属と違い抵抗がないので，この反磁性電流は流れ続ける。この結果として磁場は完全に跳ね返されて超伝導体の内部には侵入できない (図 11.2(a))。これがマイスナー効果とよばれる現象である。外から磁場をかけたときに，それを打ち消すように反応する物質は反磁性体とよばれる。強めるように反応するのが磁性体である。超伝導体のように完全に打ち消す場合を完全反磁性体という。

さらに磁場の強さを増してゆくと，電子密度は有限なので，磁場の侵入を阻止するのに十分な反磁性電流をつくれなくなる。このとき超伝導状態が完全に壊れ常伝導状態になるものと，超伝導体の一部分のみが常伝導状態になりそこに糸状に磁場が侵入する場合がある (図 11.2(b))。前者を第 1 種，後者を第 2 種超伝導体という。

クォークはカラーの自由度をもつが，それらは独立な赤緑青の 3 種類の電場の源 (荷電) と見なすことができる。先ほどの磁場の場合との類推で，電場を物体にかけたときに強める方向で反応するものが誘電体で，逆が反誘電体である。完全反誘電体も磁場の場合と同じ定義である。

真空も電場をかけると，それが原因となり粒子の生成消滅が起こる。この効果を評価すると QED の電場に対しては，われわれの真空は誘電的に反応することがわかっている。QCD の真空がカラー電場に対して完全反誘電体であったなら，カラー電場があると真空の反誘電性によりカラー電場を打ち消すようにグルーオンによって反誘電性の効果がつくり出される。QED と QCD のこの違いは，QCD のゲージ場，すなわちカラーグルーオンはそれ自身が色の電荷をもっており，自分自身と相互作用をしていたことによる。これはゲージ場のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{11.19}$$

と $F^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu - ig[B^\mu, B^\nu]$ を思い出してほしい。QED は $U(1)$ ゲージ理論なので，B は 1 行 1 列の行列で，交換関係の項はゼロとなり，QCD ゲージ理論では B は 3 行 3 列の行列なので非ゼロである。この項が真空の反誘電性を引き起こしていた。

しかし，電束は保存されるからまったくなくなることはなく，そのつりあいとして第 2 種超伝導体と同じようにカラー電束は局所に押し込められて糸状になる。

クォークとそのクォークの補色状態にある反クォークを真空中に配したならばクォークと反クォークを結ぶ糸状のカラー電束ができるであろう (図 11.3(a))。バリオンでは，3 つのクォークから出たカラー電束が 1 点で会して白色になったとき，有限のエネルギー状態としてこの世に存在が許されることになる (図 11.3(b))。

カラー電束が有限のところで白色化しない状態は，カラー電束が無限の彼方まで伸びた状態になり，カラー電束は長さあたり一定のエネルギーをもつので，エ

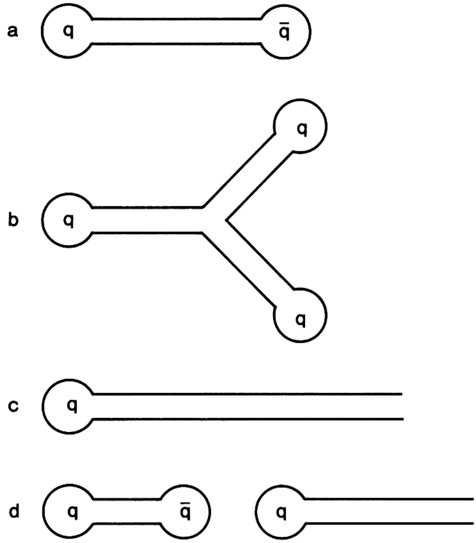


図 11.3　クォークの閉じ込め

ネルギーは無限大ということになる。このようにして，単体のクォークのようなカラーをもった状態は存在しないことが結論される (図 11.3(c))。また，陽子の中の 1 個のクォークにエネルギーを注入して単独のクォークをつくり出そうとしても，そのクォークはカラー電束を引きずっているので，マクロの距離引き離そうとすれば，ほぼ無限大のエネルギーがいることになる。それよりも，そのカラー電束は途中でクォーク・反クォーク対をつくり，図 11.3(d) のように切れ，いくつかの中間子になった方が，エネルギー的に低い状態になる。この現象は，実際，加速器実験で一方向にハドロンが集中して放出されるジェット現象として観測されている。

このクォーク閉じ込めは，前にクォークの神秘性として上げた一見相互に矛盾し合う特徴を合理的に理解する描像をわれわれに与えてくれた。QCD の反誘電性はくり込み理論で確認できる。これは次の章で議論する。

第 12 章

標準模型と展望

12.1 CP の破れと 6 元クォーク模型

クォークとレプトンを基本粒子として，強い相互作用を QCD ゲージ理論とし，電磁相互作用と弱い相互作用を電弱統一理論で記述する理論を，今日標準理論とよんでいる。この枠組で重要であったのは，ヒッグス粒子による対称性の破れ $U(1) \otimes SU(2) \to U(1)$ と，強い相互作用によるクォーク閉じ込め，ならびにカイラル対称性の自発的破れの現象であった。相互作用により付加的な部分がつけ加わるとしても，光子のような特別の粒子を除いて素粒子には本来固有の質量があるとの旧来の考えに反して，ここで浮び上がってきた素粒子の姿は，本来的にはゼロ質量であり，対称性の自発的破れの機構により質量は発生するということであった。

粒子 A がヒッグス粒子 h を放出して粒子 B になるような湯川型相互作用があって，ヒッグス粒子が真空期待値 v をもったとする。これは真空にヒッグス粒子が凝縮した結果と見ることができる。するとヒッグス粒子と相互作用する粒子は，真空中のヒッグス粒子に散乱されながら進むことになる。この効果によって粒子に質量が生じる。また，A と B が違う粒子であれば，時々刻々と粒子像を変えながら進むことになり，粒子のこの混合は粒子像の振動現象として観測される。このような粒子の混合がある場合には，場を組み換えて (ユニタリ変換をして) 決まった質量の場を再定義できることを第 10 章で示した。

ここで重要な視点に気づくであろう。一口に何々粒子というが，この概念はそ

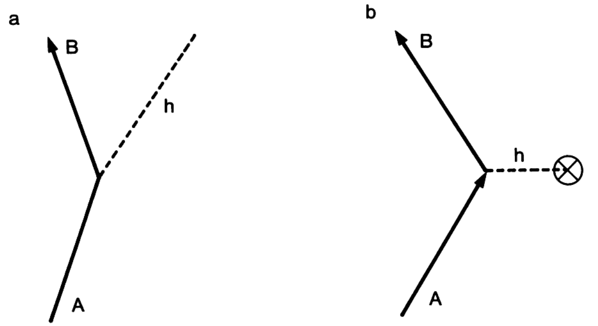


図 12.1　ヒッグス機構と粒子の混合。粒子とヒッグス粒子の湯川型相互作用があり，ヒッグス粒子が真空に凝縮すると，粒子は真空中のヒッグス粒子に散乱されながら進む。A 粒子と B 粒子が違う粒子であれば，粒子の混合が生じる。

れほど自明なものではない，ということである。例えば，弱い相互作用で 2 重項を組んでいる場の組として，弱い相互作用を通して見た粒子像と，固有な質量が決まっている場の組として見た粒子像は，本来的に一致している保証はなく，一般にはねじれているのである。これが，ゲルマン–レビの話をしたときに現れた，弱い相互作用の 2 重項で陽子と対になっていたのが $n\cos\theta+\Lambda\sin\theta$ であった背景である。この話の延長線上に，CP の破れの現象がある。これを次に紹介しよう。

第 10.3 節で，ヒッグス粒子が真空期待値をもつと，湯川型相互作用を通じて粒子混合型質量項が現れたので，ユニタリー変換をして (この近似のレベルで) 質量の確定した場で書き直すということをした。このユニタリー変換は，弱い相互作用の 2 重項の上成分と下成分を別々に，また左右の成分を独立に変換した。この効果がどのように残っているか見てみよう。具体的にはこの変換は，

$$u'^i_{\mathrm{L}} = U^{(u)i}{}_{\mathrm{L}j}u^j_{\mathrm{L}}, \qquad u'^i_{\mathrm{R}} = U^{(u)i}{}_{\mathrm{R}j}u^j_{\mathrm{R}} \tag{12.1}$$

$$d'^i_{\mathrm{L}} = U^{(d)i}{}_{\mathrm{L}j}d^j_{\mathrm{L}}, \qquad d'^i_{\mathrm{R}} = U^{(d)i}{}_{\mathrm{R}j}d^j_{\mathrm{R}} \tag{12.2}$$

であったが，γ^μ または $\gamma^\mu\gamma^5$ をスピノル場で挟んだものは，左右の成分を混合する部分を含まない。そして，弱い相互作用の 2 重項の上成分どうし，下成分どうし

で挟んだものはユニタリ変換の性質で不変である。このことに留意すると，$\gamma^\mu\partial_\mu$ の項と，光子 γ または中性弱ボソン Z の結合しているカレントは中性なので，u と d を混合することなはい。これから，これらの項は変換 (12.1) と (12.2) のもとで形を変えない。唯一問題となるのは，荷電弱ボソン W が結合しているカレントである。これは次のように変換される。

$$\begin{aligned} &i\bar{u}^i\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}d^iW^+ + i\bar{d}^i\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}u^iW^- \\ &\quad\to i\bar{u}^i\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}(U_{\rm L}^{({\rm u})*}U_{\rm L}^{({\rm d})})^{ij}d^jW^+ + i\bar{d}^i\gamma^\mu\frac{1-\gamma^5}{2}(U_{\rm L}^{({\rm d})*}U_{\rm L}^{({\rm u})})^{ij}u^jW^- \end{aligned} \tag{12.3}$$

ここで $U_{\rm L}^{({\rm u})*}U_{\rm L}^{({\rm d})}$ 行列は $U_{\rm KM}$ と書く習わしになっているので，それに従おう。ここで弱電統一理論の CP 不変性について考えてみよう。簡単にわかることなので各項ごとの検討はしないが，CP 不変性が問題になるのは式 (12.3) で表されている荷電弱ボソンの基本粒子との相互作用項である。ベクトルカレントも軸性ベクトルカレントも，バーのついた場とつかない場が入れ替ることを除いて不変であると説明した (第 4，5，9 章)。また C は粒子反粒子を入れ換える変換なので，CP 変換のもとで荷電弱ボソンは $W^\pm \to W^\mp$ と入れ替る。このことを考慮すると，式 (12.3) で第 1 項と第 2 項が入れ替り，ユニタリー行列 $U_{\rm KM}$ $(= U_{\rm L}^{({\rm u})*}U_{\rm L}^{({\rm d})})$ も $U_{\rm KM}^* \to U_{\rm KM}^{\rm t}$ と変更されることになる。すると，弱電統一理論は $U_{\rm KM}$ 行列が実行列であれば CP 不変，実行列でなければ CP の破れがあることになる。

$U_{\rm KM}$ 行列は一般にユニタリー以外の制約はないので，電弱統一理論は，$U_{\rm KM}$ が偶然実行列である場合を除いて，いつでも CP 対称性を破ってしまうように見える。しかし，対称性が破れるとはどういうことかについて，多少の注意が必要である。簡単な例をとって話をしよう。核子 N とスカラー場 σ の系の，

$$\mathcal{L} = -\bar{N}(\gamma^\mu\partial_\mu + M)N - if\bar{N}\gamma^5N\sigma - \sigma(-\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\sigma - \lambda\sigma^4 \tag{12.4}$$

なるラグランジアン密度を考えよう。σ はスカラー場であるからパリティプラスで，$\bar{N}\gamma^5N$ は擬スカラーであるから，f で始まる項の存在によって，このラグランジアンで記述される理論はパリティ非保存であると結論してよいであろうか。これは否である。これは，σ 場が擬スカラーであるとすればパリティーは保存している。どのように定義しても保存できないとき，初めて対称性の破れが生じる

のである。例えば，式 (12.4) に $f'\bar{N}N\sigma$ 項を加えてみる。すると，σ をスカラーにしても擬スカラーにしても，どちらかの項が偶奇性を破ることになる。このような場合，2 つの項の干渉として偶奇性の破れは観測される。

いまの場合，場 u や d の複素位相を決める原理はない。この任意性を使って行列 $U_{\rm KM}$ を実行列にできるなら CP の破れは生じないが，どうしてもなくせないときに CP の破れが生じると結論できる*)。この条件を求めてみよう。

要素が複素数の $N\times N$ の行列 U は複素位相を N^2 個もつが，これにユニタリーの条件 $U^*U=1$ が加わる。U^*U はエルミート行列であるから，複素位相に対する関係式として独立なものとしては，対角線から上の要素に限ることができる。したがってこれは $N(N-1)/2$ 個の条件である。さらに u^i と d^i の場の位相を再調整する自由度は $2N$ あるが，全体に共通にかかる位相は $\bar{u}Ud$ に現れないので，位相の調整には使えない。ゆえに，使える自由度は $2N-1$ となる。まとめると，どうしても U に残ってしまう位相の数は，

$$N^2-\frac{N(N-1)}{2}-(2N-1)=\frac{(N-1)(N-2)}{2} \tag{12.5}$$

となる。すなわち弱い相互作用の 2 重項が 3 組以上なら CP の破れは生じるが，2 組以下なら生じないというのが結論である。

ここでは標準理論に基づいて CP の破れの問題を分析したので議論は単純であるが，4 元クォーク模型でも CP 対称性の破れを起こさせることは不可能ではない。1 つは，右手成分をゲージ不変にせずに弱い相互作用の多重項にする方法である。もう 1 つは，ヒッグス粒子を複数導入する方法である。前者は CP 対称性を壊すことはできるが，弱い相互作用の観測結果と整合しないので採用できない。これらの分析を含めて，著者は小林誠氏 (現 KEK) と共同で CP 対称性の破れと 6 元クォーク模型の論文を書いた。

その当時 (1972 年) は，クォークも u, d, s の 3 つの自由度しか見えておらず，かつ強い相互作用についてもまったく暗中模索の時代であった。例えば強い相互作用に s クォークを特別扱いするような効果があれば，それとの干渉で 2 重項 2 つ，4 元クォーク模型で CP の破れは起こすことができた。これについては，強

*)　最も一般的な C 変換の定義は $\psi^c=\epsilon C_\gamma\bar{\psi}^t(|\epsilon|=1)$ であった (第 4 章)。この ϵ の自由度を使っていることに対応している。

い相互作用が弱電統一理論の特徴を壊すことがなければ，強い相互作用にそのような特別の軸は入りえないとの認識を少し前に得ていた (牧二郎氏との論文で発表)。標準理論の枠組を外すとこのような議論が必要になるのである。

12.2　くり込みと大統一理論，GUT

標準理論とは強い相互作用を QCD で記述し，QED と弱い相互作用を電弱統一理論で表すゲージ理論だと前に紹介したが，これらも別々のゲージ理論のままにしておかずに，もっと大きなゲージ理論があって，それが自発的に破れて，それぞれの個性が見える標準理論になったと解釈できないか，との発想が浮ぶのは自然である。これを大統一理論 (GUT; Grand Unified Theory) とよんでいる。これを紹介するには，どうしてもくり込み理論の理解がいるので，その考え方を必要最小限のレベルで紹介しよう。

実スカラー場が自己相互作用をしている簡単な系で始めよう。次のラグランジアン密度で記述されているものとする。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sigma_0(-\partial^2 + {m_0}^2)\sigma_0 - \lambda_0{\sigma_0}^4 \tag{12.6}$$

ここで $\partial^2 = \partial^\mu\partial_\mu$ とした。

図 12.2 を見てほしい。A から B に σ 粒子が伝搬するとき，相互作用があれば，図 12.2(a) のような過程も寄与してくる。相互作用をしている現実の σ 粒子は，初めに導入した σ_0 粒子の 1 個，3 個，5 個などの重ね合せの状態と考えられる。相互作用のないときの σ_0 粒子を裸の σ とよび，特に区別したいときは σ_0 で表そう。

$$|\sigma\rangle = \sum_{n-1}^{\infty} c_n|(2n+1)\sigma_0\rangle \tag{12.7}$$

相互作用があるときに実験にかかる $|\sigma\rangle$ の質量は，$2n\sigma_0$ の雲をきている効果によって，初めの m_0 からずれているはずで，それを m_r としよう。また，相互作用も，この質量 m_r をもった $|\sigma\rangle$ の粒子像から見れば (測定すれば)，$2n\sigma_0$ の雲の効果により違ってくる (図 12.2(b))。これを λ_r で表そう。

ここで問題である。ラグランジアン密度 (12.6) で，場 σ_0，質量 m_0，結合定数

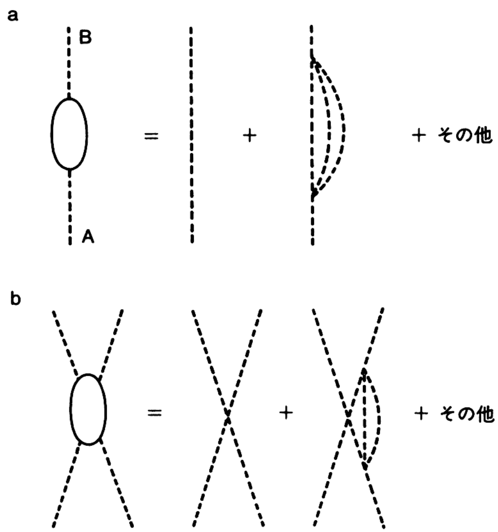


図 12.2　粒子伝搬や相互作用の高次補正。相互作用は $\lambda\sigma^4$ なので，1 点で σ 粒子が会することにより生じる。

λ_0 に基づいて計算すれば，裸の質量や結合定数が相互作用の効果により補正を受けてゆく計算法になっているが，初めから実験にかかる $m_{\rm r}$ や$\lambda_{\rm r}$に基づいて計算を進めてゆく方法はないか，という問題である。これは可能であって，再規格化法 (前者はくり込み処方*)) とよばれている。それを説明しよう。

まず再規格化変数を

$$\sigma_0 = Z_\sigma^{1/2}\sigma_{\rm r}$$
$$({m_{\rm r}}^2 - {m_0}^2)Z_\sigma = \delta m^2 \tag{12.8}$$
$$\lambda_0 = Z_\lambda {Z_\sigma}^{-2}\lambda_{\rm r}$$

*)　裸の物理量をベースに，相互作用からの寄与を取り入れて現実の物理量を計算するか，測定にかかる物理量をもとに計算して，ずれてゆく量を裸の量との差として相殺させてゆくかは，ものの見方の違いだけで物理的内容は同じである。

で定義しよう。ここで Z_σ は，場 σ の波動関数再規格化定数とよばれるものである。式 (12.7) のように，相互作用により状態はずれてゆくので，相互作用の大きさに依存して，観測にかかる質量をもった場 $\sigma_{\rm r}$ も大きさを再規格化する必要があることによる[**)]。δm は相互作用の結果つけ加わる質量を，Z_λ は相互作用の再規格化定数を表している。質量や結合定数が場 σ の 2 次，4 次で定義されていることを考慮して，式 (12.8) で Z_σ の次数は決められている。これを式 (12.6) に代入してみよう。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_\sigma\sigma_{\rm r}(-\partial^2 + {m_{\rm r}}^2)\sigma_{\rm r} + \frac{1}{2}\delta m^2\sigma{\rm r}^2 - Z_{\rm r}\lambda_{\rm r}{\sigma_{\rm r}}^4 \tag{12.9}$$

$$= \mathcal{L}^{(\rm free)} + \mathcal{L}^{(\rm int)} + \mathcal{L}^{(相殺項)} \tag{12.10}$$

$$\mathcal{L}^{(\rm free)} = -\frac{1}{2}\sigma_{\rm r}(-\partial^2 + {m_{\rm r}}^2)$$

$$\mathcal{L}^{(\rm int)} = -\lambda_{\rm r}{\sigma_{\rm r}}^4$$

$$\mathcal{L}^{(相殺項)} = -\frac{1}{2}(Z_\sigma - 1)\sigma_{\rm r}(-\partial^2 + {m_{\rm r}}^2)\sigma_{\rm r} + \frac{1}{2}\delta m^2\sigma{\rm r}^2 - (Z_{\rm r} - 1)\lambda_{\rm r}{\sigma_{\rm r}}^4$$

ここで $\mathcal{L}^{(\rm free)}$ を主要項，残りを摂動項として計算してゆくわけであるが，まず $\mathcal{L}^{(\rm int)}$ の寄与を考えよう。相互作用がなければ，粒子 σ の伝搬は $(-\partial^2 + {m_{\rm r}}^2)\,\sigma = \rho$ で記述できた (ρ は源項)。相互作用があれば図 12.2(a) のような寄与が生じるので，これは修正を受ける。これを (式 (12.11) の (　) の中身は，場の理論ではインバースプロパゲーター (逆伝播関数) とよばれるものである)，

$$(-\partial^2 + {m_{\rm r}}^2 + \Sigma)\sigma = \rho' \tag{12.11}$$

と表そう。理論が並進対称性とローレンツ対称性をもつことより，Σ は ∂^2の関数 $\Sigma(\partial^2)$ であることがわかる。ここで Σ を，

$$\Sigma(x) = C_0 + C_1(x + {m_{\rm r}}^2) + \Sigma'(x)(-x + {m_{\rm r}}^2), \qquad \Sigma'({m_{\rm r}}^2) = 0 \tag{12.12}$$

と展開しよう。次に相殺項も考慮に入れて (しばらく $(Z_{\rm r} - 1)$ で始まる項のことを忘れて) 式 (12.11) を書き直してみると，

$$[-\partial^2 + {m_{\rm r}}^2 + C_0 + C_1(-\partial^2 + {m_{\rm r}}^2) + (-\partial^2 + {m_{\rm r}}^2)\Sigma'(-\partial^2) - \delta m^2$$

**)　場の大きさは正準交換関係で決まる。これは，ラグランジアン密度の場の時間微分の項を $(\partial_0\sigma)^2/2$ の形にすることで決まる。これから σ^2 に Z_σ の 1 次が配されている。

$$+(Z_\sigma - 1)(-\partial^2 + m_r{}^2)]\,\sigma_r$$
$$= \rho' \tag{12.13}$$

となる。δm^2 や Z_σ はいままで何も決めていなかったので，ここで改めて，$C_0 = \delta m^2$，$C_1 + (Z_\sigma - 1) = 0$ と決めよう。すると，式 (12.13) は，

$$(-\partial^2 + m_r{}^2)\sigma_r = \frac{1}{1+\Sigma'(-\partial^2)}\rho' \tag{12.14}$$

となる*)。このようにして初めから観測にかかる質量を使って計算すれば，相互作用によってずれてゆく量を，相殺項を使って相殺してゆくことができる。同様に結合定数についてもずれてゆく分を，相殺項 $(Z_\lambda - 1)\lambda_r\sigma_r{}^4$ を使って打ち消すことができる。

これが再規格化法，またはくり込み処方とよばれている計算法である。これは原理的にはどのような相互作用についても適用できるものであるが，実際に QED に適用してみると，裸の量をベースに計算すると，場の自由度が無限大であることに起因して計算量が発散してしまった。しかし，再規格化法で計算すると無限大は現れないのである。前者では，計算の中に $\Sigma(-\partial^2)$ が現れるのに対して，後者では，相殺項を使って相殺してしまったあとでは，$\Sigma'(-\partial^2)$ が計算量の中に残っているのみであり，これは有限量である。発散していたのは，式 (12.12) の C_0 と C_1 であった**)。再規格化法で計算したとき，ほかに無限大が現れない理論をくり込み可能な理論，そうでないものをくり込み不可能な理論という。QED がくり込み可能な理論であることは，1947~8 年に，朝永とシュヴィンガーにより独立に発見されたが，電弱統一理論や QCD タイプのゲージ理論がくり込み可能であることを示したのは 20 歳代半ばのト・フーフト (G.'t Hooft) である (1971 年)。アインシュタイン重力はいまのところくり込み不可能と思われている。

QED においては摂動計算の展開係数が，電子の電荷を e とすると，$\alpha = e^2/4\pi$ であって，この値が 1/137.036 と小さかったことも幸いして，8 次の摂動まで計算され，この精度 (約 10^{-8}) で実験可能な量については両者は一致している。く

---

*)　1 粒子状態，すなわちエネルギー・運動量が，$p^\mu p_\mu + m_r{}^2 = 0$ のとき，すなわち，$-\partial^2 + m_r{}^2 = 0$ のとき，$\Sigma'(m_r{}^2)$ である。また，$(1+\Sigma'(-\partial^2))^{-1}$ は σ 場の再規格化定数の $p^\mu p_\mu$ 依存性と見ることができる。

**)　裸の量とくり込まれた量の間の関係が無限大と有限，ゼロと有限を結ぶ関係になっていた。

り込み理論はこのように大きな成果を収めたわけであるが，これにとどまらず新しいものの見方，視点をも提供した。これを次に紹介しよう。

結合定数のくり込みについてである。QED で考えて，電子の電荷の測定の仕方であるが，通常は静止している電子の電荷を，できるだけ長波長の光子の結合定数として測る。しかし，特定のエネルギースケールの現象に注目しているときには，そのエネルギースケール μ で測定したときの電荷 $e(\mu)$ を使った方が便利であることが多い。くり込み処方はこれを可能にするのである。

低エネルギー定理のところで紹介した話を思い出していただけばわかるように，荷電粒子があって，相互作用を通じて荷電粒子対が生成されると，空間的にある分布で電荷が分布することになるから，見る波長によって値は変る。μ スケールの現象での結合定数をベースに再規格化法を構成することを，再規格化点を μ にとる，という。結合定数がエネルギースケールとともに変化することを，結合定数のランニングとよんでいる。

ここで再規格化点 μ を変化させてみるのである。これは 1 つの理論の違った計算法というだけであるから，当然関係があるはずである。実際に，

$$\mu \frac{\mathrm{d}e^2(\mu)}{\mathrm{d}\mu} = \beta(e^2(\mu)) \tag{12.15}$$

を定義してみると，摂動計算で次数の低い部分の β は比較的容易に計算できるのである。これをくり込み群方程式という。QED でこの β を計算してみると正であることがわかる。

これは次のような議論からも理解できて，QED の真空が誘電的であることと整合している。プラスの電荷の粒子があるとき，相互作用によって対生成した荷電粒子は，負の電荷の粒子が引き寄せられ，正の電荷の粒子は離れようとするはずであるから，正味の分布は図 12.3 のようになるであろう。すると，波長 r の光子が感じる荷電は，r より内側の総電荷ということになるから，rが小さいほど，μ が大きいほど $e^2(\mu)$ は大きくなることがわかる。

一方 QCD で計算してみると，なんと β_{QCD} の符号は負であった。これはゲージ群が非可換群で，前にも述べたが，$F^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu - ig[B^\mu, B^\nu]$ の $[B^\mu, B^\nu]$ の項がゼロでないことからきていた。これは QCD の真空が反誘電的で閉じ込め

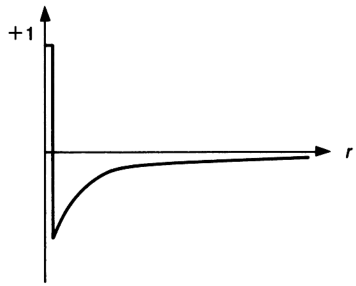


図 12.3　荷電粒子による真空分極。荷電粒子は相互作用によって，荷電粒子対を生成する。これは真空分極と見ることができる。プラスの電荷を原点に置けば，そのまわりに負電荷が分布しているように見えるはずである。

の考えともなじみ，高エネルギー散乱ではクォークの相互作用は弱くなってゆくこと (漸近自由性) とも整合していた。

さらに驚くべきことは，QCD 1 つと 電弱統一理論の 2 つの計 3 つの結合定数を，実験で測定された値をもとに，くり込み群方程式 (12.15) を使って高エネルギー側に伸ばしてゆくと，エネルギースケール $\mu \simeq 10^{15}$ GeV で三者は同じ値になったのである。このエネルギーを GUT スケールとよんでいる。

ここから，QCD 理論と電弱統一理論が別々にあるのではなく，この 2 つを含む大きなゲージ群があって，エネルギースケール 10^{15} GeV で自発的対称性の破れが生じ，それをわれわれのエネルギースケールで 2 つのゲージ理論として見ている，とする視点がたいへん有力になってくる。これは大統一理論 (GUT) とよばれる。2 つのゲージ群，$SU(3)$ と $U(1) \otimes SU(2)$ を含む最小の単純群である $SU(5)$ をゲージ群として使ったプロトタイプの理論が，ジョージァイ (H.Georgi)–グラショウ (S.L.Glashow) によって提唱された。これは，レプトンとクォークの弱い相互作用の 2 重項を，1 組ずつ使って (対応する右手成分も) 構成される。$SU(5)$ で変換を受ける添字 1 個をもった右手成分のスピノル場 5_{R} と，反対称の添字 2 つをもった左手成分の場 10_{L} を導入する ($(5 \times 5)_{\mathrm{A}} = 10$ である)。これら $SU(5)$ 多重項に，クォークとして u, d を，レプトンとして e, ν_{e} を選んで当てはめてみ

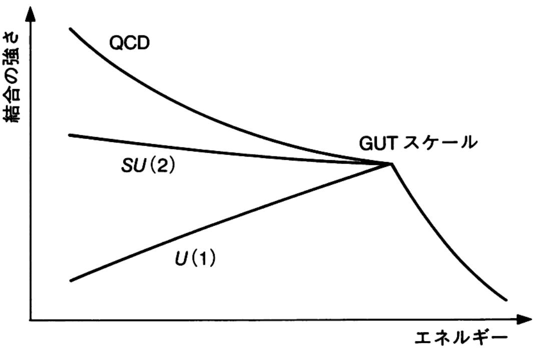


図 12.4　3 つの結合定数のランニング

ると，

$$
5_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \\ e^{\mathrm{c}} \\ -\nu_{\mathrm{e}}^{\mathrm{c}} \end{pmatrix}_{\mathrm{R}}, \qquad 10_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} 0 & u_3^{\mathrm{c}} & -u_2^{\mathrm{c}} & -u_1 & -d_1 \\ -u_3^{\mathrm{c}} & 0 & u_1^{\mathrm{c}} & -u_2 & -d_2 \\ u_2^{\mathrm{c}} & -u_1^{\mathrm{c}} & 0 & -u_3 & -d_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & -e^{\mathrm{c}} \\ d_1 & d_2 & d_3 & e^{\mathrm{c}} & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{L}} \tag{12.16}
$$

となった。$1, 2, 3$ の添字は色 $SU(3)$ の添字である。R, L の添字は右，左手成分を指している。肩の c は場の荷電共役変換を表す。ゲージ変換則を，

$$
(5_{\mathrm{R}})' = g(5_{\mathrm{R}}), \qquad (10_{\mathrm{L}})' = g(10_{\mathrm{L}})g^{\mathrm{t}}, \qquad g \in SU(5) \tag{12.17}
$$

と決めれば，ゲージ理論は決まる。

この理論は，既知のレプトンとクォークを過不足なく登場させている。ただし，ニュートリノの右手成分は現れていない (ν^{c} の右手成分は ν の 左手成分の荷電変換をしたものである) ので，何事が起こっても質量項はつくれないから，この理論ではニュートリノの質量はゼロである。

12.3　標準模型と素粒子論の展望

電弱統一理論はワインバーグ自身がその論文のタイトルを「Model of Leptons」としていることからもわかるように，多少おっかなびっくりで，いわんやクォーク閉じ込めも知らず，たいへん神秘的に見えたクォークに場の理論，さらにゲージ理論が適用できるのか，はなはだ懐疑的であった。著者が小林氏と 6 元クォーク模型に基づく CP の破れの理論を発表した年 (1972 年) の前年に，ト・フーフトが非可換ゲージ理論のくり込み可能性を証明していたが，多くの人の関心はその理論の枠組にあって，現実の素粒子の世界がゲージ理論で行けるとは感じていなかった。強い相互作用もゲージ化するとすれば，色 $SU(3)$ ゲージ理論であろうことは**誰にでもわかっていた**が，このゲージ理論は自発的に破れておらず，このゲージ粒子 (グルーオン) の質量はゼロであった。すると，強い相互作用をするゼロ質量粒子なら簡単に実験にかかるはずであるが，発見されていなかった。

1973 年に 2 つの重要な発見があった。1 つは物性論で超伝導状態に磁場をかけたときに磁束の糸ができることを示したギンツブルグ (W.L.Ginzburg)–ランダウ (L.D.Landau) の理論を，素粒子論分野で再認識 (ニールセン (H.B.Nielsen)–オレセン (P.Olesen)) したことであり，もう 1 つはポリッツアー (H.D.Politzer) とグロス (D.J.Gross)–ウィルチェック (F.Wilczek) による非可換ゲージ理論の漸近自由性 ($\beta_{\mathrm{QCD}} < 0$) の発見であった。クォークが提案 (1964 年) された翌年には，クォーク閉じ込めの機構を知らない段階で感じたクォークの神秘的なふるまいのゆえに，冗談で「クォークがハドロンの中から出てこなければよいのだがね」とささやかれていたが，この 2 つの事実の認識により (前章を参照)，場の理論の枠の中でクォークを閉じ込める可能性に皆が気づき始めた。この段階で初めて QCD は安心して使える理論になった。色 $SU(3)$ ゲージ理論に QCD と名前をつけた人はいるが，この理論の発見者はいないのである。

この後の展開は急であった。1973 年の時点ではクォークは u, d, s の自由度しか観測されていなかった*)。私もそうであったが，電弱統一理論が正しければ，クォークは 2 つずつ組になっているはずであるから，s クォークの対となる c クォークが

---

*)　クォークは単独では存在しないので，ハドロンの中にどのクォークが含まれているかを実験から推定する。

あると考え，どうしたら発見できるか考察を巡らしていた。未発見であったことから，c クォークはほかの 3 つより重いと考えられた。すると c クォークを含む粒子は重いので，加速器でつくられたとしても，崩壊先が多く存在するから早く崩壊し，短寿命で観測は困難と考えられた。しかし，この予想に反して，たいへんに幅の狭いきれいな共鳴状態として登場してくるのである*)(1974 年)。

この粒子は $c\bar{c}$ の束縛状態 (質量 3.097 GeV のベクトル粒子) で，今日 J/ψ 粒子とよばれているが，これは，ティン (C.C.C.Ting) のグループとリヒター (B.Richter) のグループがほぼ同時に独立に発見し，別々に J 粒子，ψ 粒子と名づけたからである。

この翌年 (1975 年) に，荷電レプトン τ が存在するらしい，とのパール (M.Perl) のグループの報告があり，1 年ほどしてその存在は確立する (質量 1.784 GeV のスピノル粒子)。これで，レプトンは 2 重項 3 組，(ν_e, e)，(ν_μ, μ)，(ν_τ, τ) がそろったことになる。そして 1977 年にレーダーマン (L.Lederman) たちのグループがクォーク b と $\bar{b}$ からできているベクトル粒子 Υ (質量 9.46 GeV，記号はギリシア文字でウプシロンと読む) を見つけた。

電弱統一理論ではレプトンの 2 重項の数とクォークの 2 重項の数の間には何の関係もないが，場の理論で考えるとき，次に述べる現象のためにいつもレプトンの 2 重項とクォークの 2 重項を対にして考えておくと都合がよい。これを世代とよんでいる。場の理論では自由度が無限にあるために，古典的なレベルでラグランジアンを考えているときは成立している対称性が，量子論のレベルの議論に移行すると，異常項とよばれる項が現れて，対称性を壊してしまう現象がある。これが生じると理論がくり込み不可能となり，取り扱えないので困る。しかし，レプトンとクォークの 2 重項を組にしておくと，その異常項が打ち消し合ってたちのよい理論になる**)。この理由で，世代としてまとめて考えている。1970 年の終りに，この 3 世代が t クォークを残してそろったことになる。

---

*) 時間とエネルギーの不確定性関係より，散乱過程でエネルギーをスイープしてその不安定粒子を共鳴状態とし観測したとき，その不安定粒子の寿命はピーク幅の逆数として観測される。クォークの閉じ込めとも関係しているが，狭い崩壊幅は $c\bar{c}$ の対消滅が予想以上に抑制されていたことによる。c の名の由来は charm からきている。すぐ後に登場するクォーク b や t は，bottom，top の頭文字である。

**) これは人間側の論理で，自然の側の論理としてなぜ世代の概念がいるのかはわかっていない。

$$\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \\ \nu_{\mathrm{e}} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{c} \\ \mathrm{s} \\ \nu_{\mu} \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (\mathrm{t}) \\ \mathrm{b} \\ \nu_{\tau} \\ \tau \end{pmatrix} \tag{12.18}$$

また，1978 年に東京で行われた素粒子の国際会議 (第 19 回ロチェスター会議) では弱電統一理論や QCD 理論の特徴がよく実験で検証されているとの報告もなされ，この時点で 6 元クォーク模型に基づく標準模型は多くの人が信じるところとなって，関心はこの理論の背景にあるより深い理論へと移っていった。1994 年，CDF(Collider Detector at FermiLab) グループの陽子・反陽子衝突実験による t クォーク発見の報があり，翌年には確立する (質量 176 GeV)。

この時点で当然起こる疑問は 3 世代以上のクォークやレプトンはないか，という設問である。これにもすでに答はある。まず W と Z 粒子であるが，1983 年にヨーロッパ素粒子研究センター (CERN) の陽子・反陽子衝突実験でこれらがつくられ，その質量は電弱統一理論の予言通りの値 ($M_{\mathrm{W}} = 80$ GeV, $M_{\mathrm{Z}} = 91.2$GeV, $\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.230$) で見つかった。そしてその後の精緻な実験は，くり込みの効果まで含めてよく検証されている。そして CERN の加速器 LEP によって中性弱ボソン Z の崩壊幅が精密に測られた (1989 年)。

Z 粒子は重たいのでクォークやレプトンの対に崩壊できるから不安定粒子である。前にも述べたが，この粒子を散乱過程で共鳴状態として見ると，時間とエネルギーの不確定性関係より寿命に反比例したピーク幅が観測される。Z 粒子の寿命は崩壊先の多さに依存するから，ニュートリノの数が変れば変る。そこで電子・陽電子散乱，

$$\mathrm{e} + \mathrm{e}^{+} \to \mathrm{Z} \to \mathrm{e} + \mathrm{e}^{+} \tag{12.19}$$

で精密に Z 粒子の崩壊幅を測定したら，ニュートリノの数は 3 と決まり，世代の数は 3 ということになった*)。

次に GUT であるが，これは新しい質の問題を提起した。GUT スケール (約 10^{15} GeV) の世界の物理でわれわれの世界の特徴が決まっているとすると，GUT

*) エネルギー的に崩壊に寄与できない，Z 粒子の質量の半分以上の質量 (46 GeV) をもったニュートリノの存在は否定していない。

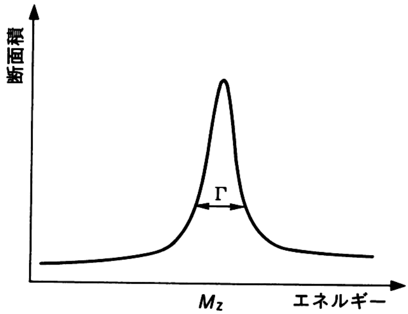


図 12.5　散乱現象と崩壊幅。時間とエネルギーの不確定性関係により，Z 粒子の質量に不定性が生じる。不安定な粒子を共鳴準位として観測したとき，ピーク幅は寿命の逆数となる。

の理論に現れる物理量はたいへん精度よく調整されていなければならない。それは不自然である，とする議論である。もう少し説明すると，GUT スケールから見てわれわれのエネルギースケールは極端に小さいのであるが，たまたま陽子のような小さい質量の粒子をつくる機構があったとしても (シーソー機構等いくつかはある)，それは相互作用による補正を受けるはずであるし，その大きさは当然 GUT スケールが予測される。これらがうまく打ち消し合っていなければならない。これは不自然だ，との議論で **“自然さ”** の問題とよばれている。

これに答えるものとして超対称性の考えがある。これはボース粒子とフェルミ粒子の間の対称性で，フェルミオンがあれば同じ性質をもったボソンがある，とする理論である。こうしておくと，ボソンとフェルミオンは相互作用による補正の寄与の符号が逆であるために，寄与が打ち消し合って，補正のエネルギー依存性が穏やかになり，自然さの問題が緩和されるのである。光子 (フォトン) の超対称性粒子はフォティーノで，ニュートリノにはスニュートリノが，というように，すべての粒子には相棒がいることになる。たいへん魅力的な考えであるが，超対称性がある兆候はまだ見えていない。超対称性粒子が発見されれば，素粒子論に大きな進歩をもたらすであろう。超対称性は，フェルミオンとボソンを結びつけ

るので，この変換の生成子はスピノルの添字をもつことになる。この生成子のプラス型の交換関係は時空の並進運動の生成子 (エネルギー・運動量演算子) になっていることからもわかるように，時空と関係の深い概念であり，重力理論とも関係してくるであろう。

GUT にかかわる直接の問題は，QCD と電弱統一理論の 3 つの結合定数が 1990 年代に入り精密に測られると，図 12.4 の 3 つの線がわずかではあるがずれて 1 点で会合しないことが明らかになってきたのである。初めの素朴な $SU(5)$ ではまずいのである。そこでこの $SU(5)$ を超対称化した理論とか，$SU(5)$ を含むさらに大きな群の $SO(10)$ GUT とかが考えられている。

もう 1 つの GUT の特徴は，核子数非保存 (陽子崩壊) をもたらすことと，磁気単極子の存在の予言である。素朴な $SU(5)$ GUT は陽子寿命 $\tau_{\rm p} \simeq 10^{30}$ 年を予言したが，最近の観測値では $\tau_{\rm p} \geq 10^{31}$ 年ということになっている。改良された GUT 理論では不定性があってたしかな予言はむずかしいが，陽子崩壊が見つかれば，素粒子理論の構築にたしかな立脚点を与えることになる。磁気単極子は宇宙初期につくられると考えられるが，その痕跡は見つかっていない。なぞのままである。

CP の破れについては，われわれの 3 世代クォークに基づく理論を発表した論文でも，ほかの可能性としてヒッグス粒子が複数ある場合も指摘してある。しかし，最終的に現実の CP の破れがどうなっているのかは，実験で確かめる以外にない。この計画も，b クォークを (含む粒子を) 大量につくって (「B 工場」) $U_{\rm KM}$ 行列を決定する計画が，日本の KEK(高エネルギー加速器研究機構) を含めいくつかの研究所で進行中である。成果を期待したい。

ニュートリノの質量の問題であるが，実験的には直接捕まえることがたいへんむずかしいので，ニュートリノを放出している過程でエネルギー保存則を使って決める以外にないが，現状ではエネルギー分解能で決まる上限しかわかっていない*)。$SU(5)$ GUT ならニュートリノの質量はゼロであるが，今日ではどちらかというと質量はあるであろうと考えられている。これと関係した話にニュートリノ振動の話題がある。電弱統一理論に起因する基本粒子の混合の問題で，レプト

---

*)　$m_{\nu_{\rm e}} \simeq 1\,{\rm eV}$，$m_{\nu_\mu} \leq 0.17\,{\rm MeV}$，$m_{\nu_\tau} \leq 24\,{\rm MeV}$。

ンにも粒子混合が考えられる。例えば弱い相互作用で μ と組になっているニュートリノは，決まった質量をもった場ではなく，質量の決まった場の重ね合せということになる。すると坂田–井上の“2 中間子論”の話のところで，宇宙線でつくられた π^- が $\pi^- \to \mu + \bar{\nu}_\mu$ となる**)といったが，地上まで来たときには，固有の質量をもっていないために 3 つのニュートリノ間で振動を起し違ったニュートリノになっている確率が生じる。これは大気上空から来たものと地球の裏側から来たものを比較するとわかる可能性がある。これは近日中に答が出るであろう。

可能性といったのはどれぐらいの周期 (結果的には距離) で振動しているかわからないからである。このためいろいろの長さの基線で観測が計画されているし，あるものは進行中である。この 1 つに太陽ニュートリノの話題がある。太陽の中の核融合は原子核を媒介とした複雑な反応であるが，基本的には，$\mathrm{p} + \mathrm{e} \to \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$ が起こって，4 つの陽子が $^4\mathrm{He}$ になる。この際に 2 つの ν_e がつくられるから，太陽は大量のニュートリノを宇宙空間に放出していることになる。この太陽ニュートリノを 600 トンの $\mathrm{C_2Cl_4}$ を使って観測していたデービス (R.Davis) が，理論的に予測されるだけのニュートリノが来ていないと 1970 年の初めにいい出したのが，太陽ニュートリノ問題の始まりである。これをニュートリノ振動から説明するのは前に書いたのと同じで，地上では電子と組になったニュートリノを測定しているので，つくられたν_e が振動の結果ほかのタイプのニュートリノになっていれば，その確率だけ小さくなるからである。この分野での研究は神岡の地下観測装置をはじめ日本は世界の最先端をいっているので，貴重な貢献ができるものと期待している。

最後に重力にかかわる話をする。ここで長さ L ほどの広がりをもった現象を考えよう。これは波数 $2\pi/L$ をもつから，運動量 (p) は $\hbar/L$ となり，十分に相対論的であるとすると運動エネルギー (cp) は $c\hbar/L$ である。等価原理 $(E = mc^2)$ により，広がり L の質量分布に対応して重力ポテンシャル $-G \cdot (c\hbar/Lc^2)^2/L$ が生じる。これが運動エネルギーとつりあう条件を求めてみよう。

$$\frac{c\hbar}{L} - G\frac{\hbar^2}{c^2L^3} = 0 \tag{12.20}$$

**)　$\pi \to \mathrm{e} + \bar{\nu}_\mathrm{e}$ も当然あるが，これらの崩壊比はレプトンの質量の 2 乗に比例するので，μ の方が 4 万倍ほど多い。

ここで G はニュートンの万有引力の法則に出てくるニュートン定数である。この式 (12.20) から，$L=\sqrt{\hbar G/c^3}=1.62\times 10^{-35}$ m と決まる。プランク定数 $\hbar$ と光速 c，そして重力定数 G は独立な次元をもっているので，これらが 1 となる単位系は唯一に決まる。これを重力自然単位系とよび，この単位系での単位長さ，時間，質量をプランク長さ ($L_{\rm PL}$)，時間 ($\tau_{\rm PL}$)，質量 ($m_{\rm PL}$) という*)。上記の値はまさしくプランク長さであり，それの物理的意味を示している。長さ L の現象であれば，量子論であれば必ず $1/L\,(c=\hbar=1$ の単位系に戻した) のエネルギーがあり，局所的な現象であればあるほど高エネルギーの現象といえるが，当然それには重力ポテンシャルが働く。重力は万有引力であるから引力であり，ポテンシャルエネルギーは負で，高エネルギー現象ほどそれは大きい。それがつりあってゼロになる長さがプランク長さであり，特徴的な質量はプランク質量ということになる。ここで注目してほしいのは，このプランク・スケール (プランク質量を GeV の単位で表すと，約 10^{19} GeV) と GUT スケール (約 10^{15} GeV) がそれほど違わないことである。GUT 理論は魅力的な考えではあるが，改良型 GUT 理論では GUT スケールが一意的に決まるわけではない。すると，GUT を経ずにプランク・スケールで 4 つの相互作用が一挙に統一される可能性も視野に入れておく必要があろう。

アインシュタイン重力では重力現象は，空間が曲がったり歪んだりすることであるといったが，地球ほどの質量があってもわれわれの測量技術にかかるほどには曲がっていない。しかし，プランク長さ，質量の世界ではエネルギーコストなしで曲がれることを，上の計算は教えてくれる。量子重力の世界は豊富な力学現象が期待される。

量子重力の世界の話題としてカルーツァ(Th.Kaluza, 1921 年) とクラインの理論 (1926 年) がある (K–K 理論)。アインシュタイン重力の枠組の中に電磁気も含ませられないか，という動機で考え出された。電磁気の自由度を導入するために次元を 4 から 5 に上げて，5 番目の次元をプランク長さほどの輪に丸めるのである。すると，マクロの現象からは 5 番目の次元方向の運動は見えないが，その輪が震える自由度の効果は，エネルギーコストがいくらでもゼロに近い現象として，

*)　$L_{\rm PL}=1.62\times 10^{-35}$ m，$\tau_{\rm PL}=0.539\times 10^{-43}$ sec，$m_{\rm PL}=2.16\times 10^{-8}$ kg。

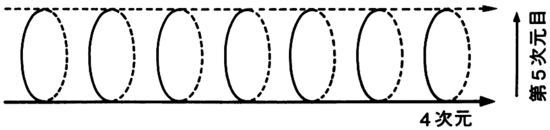


図 12.6 第 5 次元目の自由度から電磁気の自由度を導く。第 5 次元目をプランク長さほどに丸める。するとマクロには 5 次元目は見えないが，その輪の震えはマクロな現象に顔を出す。それが電磁現象だとするのが K–K 理論である。

マクロの現象として可能であり*)，実際にこれを 5 次元のアインシュタイン方程式に乗せて計算すると，正しくマクスウェル方程式が導出できるのである。次元を高めればほかのゲージ理論を出すことも可能である。

古典論のレベルで見ると K-K 理論はたいへん魅力的な理論ではあるが，アインシュタイン重力がいまだにくり込み可能かどうかわからないように，量子論のレベルではそのままでよいのか疑問である。最近では新理論があって**)，結果的にはマクロの世界で見るとアインシュタイン重力も含まれている，そのような理論が追究されている。この方向での有力な理論として，弦理論に始まる広がりをもった物体の理論に関心が集まっている。場の理論は各点に対応して物理量が存在する理論であるが，例えば弦理論は，ひもの形状ごとに物理量が対応する理論である。これはひもの形状をモード展開してみればわかるように，無限の点粒子の集団を扱っているとも見られないことはない。さらに GUT の話のところで紹介した超対称化，すなわちフェルミ粒子とボース粒子を組にして考えると，無限個のそれらが協力し合って相互作用の高次効果を穏やかにし，重力まで含むにもかかわらず，たちのよい理論になるのではないかと考えられている。最近この理論の力学的ふるまいを解析する手法が見つかり，活況を呈している。まったく新しい空間時間像が出現するかもしれない。進展が期待される。

---

*) この自由度は，4 次元ベクトルポテンシャル A^μ となる。

**) 高い次元からマクロの 4 次元世界をつくり出す手法は，K-K 理論から引き継がれている。

一方で 1960 年代までは，今世紀初頭の相対論と量子力学の余韻覚めやらずで，法則の適用限界を意識しすぎ，場の理論を不当に評価していたが，反対に今日では，法則の適用限界に対する意識が希薄すぎるようにも思える。量子重力の世界がまったく新しい概念を必要としている可能性も，心にとめておく必要があろう。

最後に GUT や 量子重力の世界の理論をどう検証するかである。基本的には理論の整合性を頼りに研究を進めざるをえないが，数百 GeV での結合定数の精密測定が 10^{15} GeV くらいの現象の物理に発言して，$SU(5)$ GUT を否定したように，また弱い相互作用よりさらに数百分の 1 の稀な，エネルギー数百 MeV 程度の現象である CP の破れが 180 GeV のトップクォークの存在を暗示していたように，精密実験・稀少現象は GUT やプランクスケールの世界をのぞく望遠鏡の役割を果してくれる。これらにも期待したい。また，宇宙初期には超高エネルギー・超高密度の瞬間があった。宇宙には「化石」として，この瞬間の痕跡が残されているものと期待される。この分野からも重要な情報が得られるであろう。

あとがき

この本は月刊雑誌「パリティ」に，1997 年 4 月号より 1 年連載された「いま，もう一つの素粒子論入門」を単行本化したものである。本の表題は，シリーズ・パリティブックスに「いまさら …」という表題の本が数多くあり，それを参考にさせてもらうことにしたが,「いまさら，素粒子論」では落ち着きが悪い。素粒子論はいまつくられている最中の学問である。そこで少しひねって「いま，もう一つの素粒子論入門」にした。これはコンピュータのワークステーションの Unix 上で動いている優れもののプログラムに「yacc; yet another compiler compiler」があり，この名前を借用したものである。

素粒子論は物質の最も基本的な存在形態，運動法則を研究する学問であるが，物質が原子からつくられているということが明らかになれば，必然的に，では原子は何からできておりそれを支配している法則はどのようなものであろうか，というふうに関心は自ずから先に進んでいく。

原子は原子核とそのまわりを取り囲んでいる電子からつくられており，原子核は陽子と中性子からつくられていること，そしてそれらを強く結合させる力は湯川中間子をはじめとする多くの中間子の交換で生じる力によることを素粒子論は明らかにしたが，そこで生じている現象はたいへん複雑であった。

これは陽子や中性子がクォークの束縛状態であり，比較的エネルギーの低い陽子や中性子の力学現象 (結合系の性質や散乱) にすらクォーク多体系としての性質が顔を出す。しかし構成要素クォークは，陽子や中性子の外へ単独で飛び出してくることはなかった (クォークの閉じ込め)。このことを理解するためにたいへん苦渋に満ちた道程を歩かねばならなかった。

現在ではクォークの基本的運動状態を，ゲージ理論とよんでいる理論で記述で

きるまでになった。現在の課題は，なぜこのような性質のクォークがあるのか，の答を求めそして重力まで含めた統一的な世界像を模索している段階である。

現在の素粒子論を語るにはその力学法則の性質まで含めて理解する必要があり，現実に素粒子の力学法則に現れるゲージ理論は時空とたいへん緊密な関係にある。重力まで含めて考えると時空の力学的性質が前面に現れてくる。これらの意味において多少ともその香りを感じとっていただくには，相対論的場の量子論の説明も避けて通れなかった。

1998 年 7 月 26 日

盛夏の京都にて　　益　川　敏　英

索　引

欧　文

和　文

あ　行

た　行

な 行

は 行

ま 行

や　行

ら・わ　行

著者の略歴

1967年名古屋大学大学院理学研究科修了.
名古屋大学理学部助手，京都大学理学部助手，東京大学原子核研究所助教授，京都大学理学部教授などを経て，現在，京都大学基礎物理学研究所教授（同研究所所長），日本学術会議会員.
理学博士.
第25回仁科記念賞，第1回J.J.S.賞（アメリカ物理学会の賞），昭和60年度日本学士院賞ほか受賞多数.

パリティブックス
いま，もう一つの素粒子論入門

平成10年8月30日　発　行

著作者　益　川　敏　英

発行者　鈴　木　信　夫
出版事業部　深山恒雄

発行所　丸善株式会社

出版事業部
〒103-8244 東京都中央区日本橋三丁目9番2号
編集部 電話(03)3272-0512／FAX(03)3272-0527
営業部 電話(03)3272-0521／FAX(03)3272-0693
郵便振替口座　00170-5-5

組版印刷・三美印刷株式会社／製本・交通製本株式会社

ISBN 4-621-04495-8 C3342　　Printed in Japan

『パリティブックス』発刊にあたって

『パリティ』とは，我が国で唯一の，物理科学雑誌の名前です。この雑誌は1986年に発刊され，高エネルギー（素粒子）物理，固体物理，原子分子・プラズマ物理，宇宙・天体物理，地球物理，生物物理などの広範な分野の物理科学をわかりやすく紹介した解説・評論記事，最新情報を速報したニュース記事を主体とし，さらにそれらの内容を掘り下げたクローズアップ，科学史，科学エッセイ，科学教育などに関する話題で構成されています。

この『パリティブックス』は，『パリティ』誌に掲載された科学史，科学エッセイ，科学教育に関する内容などを，精選・再編集した新しいシリーズです。本シリーズによって，誰でも気楽に物理科学の世界を散歩できるようになることと思います。

また，本シリーズには，新たに「パリティ編集委員会」の編集によるオリジナルテーマも随時追加されていきます。電車やベッドのなかでも気楽に読める本として，皆さまに可愛がっていただければ嬉しく思います。

ご意見や，今後とりあげるべきテーマに対するご要望などがあれば，どしどし編集委員会までお寄せください。

『パリティ』編集長　大槻義彦